CIENCIA Y SOCIEDAD

SOBRE EL NUMERO Ø

Diómedes Bárcenas

En los albores del pensamiento griego los pitagóricos, quienes descubrieron que los sonidos armónicos responden a razones numéricas sencillas, vivieron convencidos de que el Universo es todo número y razones geométricas. Aunque no es tan fácil percibirla en lo auditivo, también especularon sobre la armonía visual: para ellos la forma más hermosa de rectángulo es aquélla en que la proporción entre el lado mayor y el lado menor sea igual a la de la suma de los lados y el lado mayor.

Una variante filosófica de la proposición pitagórica es a su vez una de las más citadas sentencias de Platón, expresada por boca de Timeo: "No es posible que dos cosas se compongan de una manera bella sin una tercera, porque ha de haber en medio un cierto vínculo coajustador de ambas... el más bello vínculo es aquel que une máximamente en unidad a sí mismo y a los vinculados. Más esto es precisamente lo que la analogía hace, por la naturaleza, de la más bella manera; porque si entre tres cosas cualesquiera... hay un medio, lo que sea el primero respecto de él, eso mismo será él respecto del último".

Una variante geométrica de esta sentencia de Platón está resuelta en la proposición 30 del libro VI de los elementos de Euclides: Dividir un segmento en media y extrema razón. Otra solución geométrica a este problema se encuentra en la proposición 11 del libro II de los mencionados Elementos.

Intentemos ahora calcular las proporciones del rectángulo aludido por los pitagóricos. Para ello consideremos un rectángulo de lados a y b con $a > b$.. Si el rectángulo tiene las proporciones referidas por los pitagóricos, entonces se satisface la ecuación

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

de donde

$$\frac{1+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Si hacemos el cambio de variables $X = a/b$, obtenemos la ecuación

$$1+\frac{1}{x} = X$$

o equivalente

$$X + 1 = X^2$$

cuya solución positiva es

$$X= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

De estos podemos concluir que la proporción de rectángulos buscada por los pitagóricos es $1 + \sqrt{5}/2$. Planteamientos algebraicos similares conducen a que $1 + \sqrt{5}/2$ es la proporción resultante al dividir un segmento en media y extrema razón.

En lo sucesivo el número $1 + \sqrt{5}$ será llamado el número $\varnothing$ por razones que explicaremos luego

Si bien el conocimiento del número $\varnothing$ está unido a la solución de problemas geométricos, su supervivencia y difusión está unida a la historia del arte y de las ciencias.

A comienzos del siglo XIII, el gran matemático italiano Leonardo de Pisa —mejor conocido como Fibonacci y a quien además se le atribuye la introducción de los números arábigos en Europa— interesado en demostrar el rápido crecimiento de poblaciones de conejos, construyó un modelo matemático conocido hoy día como sucesión de Fibonacci.

Fibonacci partió de la hipótesis de que un par de conejos adultos, por supuesto macho y hembra, producían mensualmente un par de conejos jóvenes. Supone además que éstos son de ambos sexos y que llegan al estado adulto al cabo de dos meses. Al tercer mes el par de conejos original y el par de conejos jóvenes producen cada uno un par de conejos y así sucesivamente.

Razonando de esta forma y denotando por a_n el número de pares de conejos adultos al final del n-ésimo mes, obtenemos la siguiente sucesión.

$a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = 2; a_4 = 3; a_5 = 5; a_6 = 8; a_7 = 13; a_8 = 21.....$

Para inducir el número de pares de conejos adultos al cabo de n meses; estudiando las relaciones aritméticas de los ocho primeros términos de la sucesión anterior vemos que

$a_3 = a_1 + a_2$; $a_4 = a_2 + a_3$; $a_5 = a_3 + a_4$;

$a_6 = a_4 + a_5$; $a_7 = a_5 + a_6$ y $a_8 = a_6 + a_7$.

Si seguimos este proceso indefinidamente, podemos ver que el número de pares de conejos adultos es un determinado mes se obtiene sumando el número de ellos en cada uno de los dos meses anteriores. Esto motiva la siguiente definición.

La sucesión $\{a_n\}$ cuyos términos son $a_1 = 1; a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \leq 3$ es conocida como sucesión de Fibonacci.

La velocidad de crecimiento mensual de pares de conejos adultos se define mediante el cociente a_n / a_{n-1} y cuando el número de meses es muy grande, la velocidad de crecimiento se acerca al número $\emptyset$; la proporción buscada por los pitagóricos

Pero la velocidad de crecimiento de poblaciones de conejos no agota las relaciones entre el numero $\emptyset$ y la sucesión Fibonacci. Se puede demostrar que para cualquier número natural $n \geq 2$, $\emptyset n = a_{n-1} + a_n \emptyset$ lo cual permite obtener el valor de las potencias enésimas del número $\emptyset$ sin necesidad de apelar a cálculos engorrosos.

Entre otras propiedades matemáticas del número $\emptyset$ podemos citar

$$\emptyset^n = \emptyset^{n-1} + \emptyset^{n-2}$$

para cada número entero n. Es importante hacer notar que $\emptyset$ es el único número que satisface tal propiedad; y en el caso particular en que $n=1$, se obtiene la expresión

$$\emptyset = \sum_{k=1}^{\infty} 1/\emptyset^k$$

Si llamamos **Triángulo de Price** a todo triángulo rectángulo de hipotenusa z y catetos x e y con $x < y$ satisfaga la proporción $z = y$, podemos demostrar que para tales triángulos la proporción $z/y = y/x$ es igual a $\sqrt{\emptyset}$.

Es probable que estos triángulos hayan sido estudiados por los antiguos egipcios, ya que los estudiosos de las pirámides han encontrado que, el cociente entre la altura y el lado de la base de la pirámide de Keops es una buena aproximación de $2\sqrt{\emptyset}$. En palabras de Spengler ¡la arquitectura egipcia es un "tratado mudo de geometría"!.

Un número particularmente importante en geometría es el número π. Las relaciones entre π y $\emptyset$ se obtienen mediante ecuación $\emptyset = 2 \cos\pi/5$; la cual relaciona al número π con polígonos regulares ya que el ángulo $\pi/5$ ubyace, entre otros, en el pentágono y el decágono.

Según las investigaciones de Leonardo de Vinci, el número $\emptyset$ aparece también en las proporciones antropométricas. Por ejemplo, el promedio del cociente entre la distancia del ombligo a los pies y de la cabeza al ombligo, en personas bien proporcionadas, se aproxima al múmero $\emptyset$.

Si convenimos en llamar rectángulo ø a todo rectángulo que tenga las proporciones buscadas por los pitagóricos, podemos ver que dicho rectángulo es el único en el que la prolongación de una diagonal contiene al vértice del rectángulo adyacente, de idénticas dimensiones, colocado verticalmente de lado.

Los botánicos han encontrado en filotaxia ciertas relaciones, que si bien aparecen de manera aleatoria, en promedio pueden explicarse mediante el uso del número ø y de la sucesión de Fibonacci. Estos se encuentran también en la distribución de flósculos de flores compuestas.

La riqueza de propiedades aditivas y geométricas del número ø le hacen ser uno de los números más importantes en la teoría de las proporciones arquitectónicas. Luca Pacioli llamó proporción divina a la proporción ø y el astrónomo Kepler llamó a ø número oro; por tales razones la proporción ø es llamada distintamente divina o proporción aúrea. En cuanto a su bautizo con el nombre de ø, éste fué hecho por Mark Barr en honor a Fidias, escultor griego que le utilizó.

Un concepto de gran importancia en arte es el ritmo, el cual consiste en la repetición periódica de objetos y figuras. Es aquí donde adquiere en estética gran preponderancia el número ø ya que sus excelentes propiedades aditivas y geométricas permiten diseñar con rectángulos de diferentes tamaños pero formas semejantes; entendiéndose por rectángulos de formas semejantes aquellos que tienen la misma proporción. Para los estetas, un diseño con diversidad de formas es caótico, mientras que resulte armonioso un diseño con economía de formas; un diseño que mantenga cierto ritmo.

REFERENCIAS

1) Alsina C. Trillas E. Lecciones de Algebra y Geometría, Gustavo Gili, Barcelona (1984).

2) Batschelet, Introduction to Mathematicas for life scientists, Springer-Verlang, Berlin-New York (1975).

3) Matila G, Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes, Poseidón, Buenos Aires (1953).

4) Matila G, The Geometry of Art and life, Dover, New York (1977).

5) Platón, Timeo, Ediciones de la Universidad Central de Venezuela, Caracas (1982).