*Artículo de Investigación. Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 43-1, No. 1 pp. 3-10, diciembre-marzo, 2022.*
*ISSN 1316-7081. ISSN Elect. 2244-8780 Universidad de los Andes (ULA)*

# Un problema de control en sistemas dinámicos de eventos discretos

# A control problem in discrete event dynamic systems

**Demera-Reyna, Carla[1*]; Mata-Díaz, Guelvis[2]; Ruiz-Leal, Bladismir[3]**
[1]Instituto de posgrado, Universidad Técnica de Manabí, Ecuador.
[2] Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.
[3]Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Técnica de Manabí, Ecuador.
*carlaestefaniademera@gmail.com
**DOI:https://doi.org/10.53766/CEI/2021.43.01.01**

**Resumen**

*Proponemos un modelo de control para un sistema dinámico de eventos discretos, generado desde la composición paralela de sus subsistemas bajo la noción de consenso; equivalentemente desde un punto de vista modular, generado por la descomposición del lenguaje controlable global a través de los sublenguajes de sus subdinámicas cerradas. Esto permite la unificación de criterios para control, implementación óptima y la resolución de un problema modular: Dados un sistema dinámico de eventos discretos modelado por composición paralela, un conjunto de eventos no controlables del sistema y un lenguaje cerrado (condiciones sobre el sistema) físicamente posible, construir un control modular restrictivo minimalmente.*

**Palabras clave: s**istemas de eventos discretos, control, planificación, consenso.

**Abstract**

*We propose a control model for a dynamic system of discrete events, generated from the parallel composition of its subsystems under the notion of consensus; equivalently from a modular point of view, generated by the decomposition of the global controllable language through the sublanguages of its closed subdynamics. This allows the unification of criteria for control, optimal implementation and the resolution of a modular problem: Given a dynamic system of discrete events modeled by parallel composition, a set of non-controllable system events and a physically possible closed language (conditions on the system), build a restrictive modular control minimally.*

**Keywords:** discrete event systems, control, planning, consensus

## 1 Introducción

Un Sistema Dinámico de Eventos Discretos (SDED) es descrito como un espacio discreto de estados, donde los cambios entre estos son disparados por la ocurrencia de eventos (Aldaniyazov 2018, Al-Jaar y col., 1990, Dante, y col., 2007, Guo-zhu, y col., 2007, Yan, y col., 2004). Los sistemas distribuidos, redes de comunicación, sistemas de transporte, etc. son SDED. Luego, dada la importancia de esta clase de Sistemas Dinámicos, existen enfoques de modelación para ordenar la ejecución deseable, y así dar solución a una diversidad de problemas en dichas disciplinas (Andrade y col., 2018, Caspi 1991, Eilenberg 1974, Gradišar y col., 2007, Mata, y col., 2016, Mata, y col., 2018).

El concepto de control en sistemas dinámicos de eventos discretos es fundamental para el estudio de propiedades cualitativas mediante la realimentación dinámica. Este control, tal como es expuesto en (Wonham 2015), es ejercido para llevar a cabo un conjunto de especificaciones sobre la dinámica de un SDED. También podría eliminar el bloqueo. Desde este punto de vista la teoría de control es muy útil. Actualmente, en el sentido de (Wonham 2015), han sido reportados muchos resultados teóricos en controlabilidad y síntesis modular en SDED, que se resumen principalmente en contextos de ambientes centralizados o descentralizados y donde la comunicación entre los subsistemas es importante para la inicialización de operaciones coordinadas (Arias y col., 2018).

Nosotros proponemos una conceptualización modular fundamentada en la noción de consenso; en sí mismo, esto da paso a una estructura formal modular óptima la cual garantiza el cumplimiento de un conjunto dado de condiciones sobre el sistema de forma controlada. Esta estructura muestra flexibilidad, implementación y reconfiguración del sistema en un número finito de lazos de realimentación dinámica, y está direccionada desde las interacciones entre los subsistemas. Más aun, combina la metodología tradicional para la modelación de un SDED por composición con el análisis y control desde un punto de vista local, permitiendo simplificación en el tamaño del diseño e implementación.

La organización de este artículo comienza con una sección preliminar, donde son considerados algunos resultados y nociones básicas en la teoría de Autómatas y control supervisorio: Composición paralela, caracterización de lenguajes controlables y aproximación a lenguajes no controlables; que nos permitirán el desarrollo subsiguiente. Posteriormente, presentaremos dos problemas conocidos en teoría de control supervisorio, junto con sus soluciones: problema básico de control y problema de control sin bloqueo; que nos garantizarán la existencia de los controladores en nuestra propuesta central. Finalmente, serán expuestos nuestros resultados teóricos que nos permitirán darle solución a un par de problemas modulares. Aplicación 1: dados un sistema dinámico de eventos discretos modelado por composición paralela, un conjunto de eventos no controlables del sistema y un lenguaje cerrado físicamente posible de condiciones sobre el sistema, construir un control modular restrictivo minimalmente por consenso; y Aplicación 2: dados un SDED modelado por composición paralela, un conjunto de eventos no controlables del sistema y un lenguaje marcado $Lm$ -cerrado, construir un control modular no bloqueado restrictivo minimalmente por consenso.

## 2 *Preliminares*

Asumiremos que el lector está familiarizado con los conceptos y resultados básicos de las teorías de lenguajes y autómatas (Eilenberg 1974, Hopcroft y col., 1979, Mata y col., 2018), necesarias para el estudio de nuestra propuesta de control.

### 2.1 *Composición paralela*

El producto y la composición paralela son modelos para la representación global que contiene el aspecto de sincronización. Más precisamente, si $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^n$ es una colección finita de autómatas determinísticos con $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma_i, \delta_i, \mathcal{E}_i, q_{0i}, Q_{mi})$, $i = 1, \dots, n$; entonces el producto de los $\mathcal{A}_i$ , denotado por $\times_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ es dada por $\mathcal{A}_a(\times_{i=1}^n Q_i, \bigcap_{i=1}^n \Sigma_i, \delta, \mathcal{E}, (q_{01}, \cdots, q_{0n}), \times_{i=1}^n Q_{mi})$, donde $\delta\big((q_1, q_2, \dots, q_\mathrm{n}), \alpha\big) = \big(\delta_1(q_1, \alpha), \dots, \delta_\mathrm{n}(q_\mathrm{n}, \alpha)\big)$, si $\alpha \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{E}_i(q_i)$ e indefinida en otro caso; y $\mathcal{E}((q_1, q_2, \dots, q_n)) = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{E}_i(q_i)$ . Por su parte, la composición paralela de los $\mathcal{A}_i$, denotada $\|_{i=1}^n \mathcal{A}_i$, es dada por $\mathcal{A}_a(\times_{i=1}^n Q_i, \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i, \delta, \mathcal{E}, (q_{01}, \cdots, q_{0n}), \times_{i=1}^n Q_{mi})$ , donde $\mathcal{A}_a$ denota el autómata accesible y $\delta((q_1, q_2, \dots, q_n), \alpha) = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ con $P_i = \delta_i(q_i, \alpha)$, y $P_j = q_j$, si $\alpha \in \bigcap_i \mathcal{E}_i(q_i) \setminus \bigcup_{j:j\neq i} \Sigma_j$ $i, j = 1,2, \dots, n$; e indefinida en otro caso. Además, se puede verificar sin mayores problemas que

$$\mathcal{L}(\times_{i=1}^n \mathcal{A}_i) = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_i(\mathcal{A}_i), \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}_m(\times_{i=1}^n \mathcal{A}_i) = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_{mi}(\mathcal{A}_i) \qquad (2)$$

y

$$\mathcal{L}(\|_{i=1}^n \mathcal{A}_i) = \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}\big(\mathcal{L}(\mathcal{A}_i)\big), \qquad (3)$$

$$\mathcal{L}_m(\|_{i=1}^n \mathcal{A}_i) = \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}\big(\mathcal{L}_m(\mathcal{A}_i)\big) \qquad (4)$$

donde las $\pi_i: (\bigcup_{i=1}^n \Sigma_i)^* \to \Sigma_i^*$ , $i = 1, \dots, n$ son las proyecciones canónicas.

### 2.2 Control

Sea $\Sigma$ representando el conjunto de eventos de un SDED, y sean $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}$ lenguajes sobre $\Sigma$. Sea $\mathcal{A}$ un autómata determinístico representando a los lenguajes $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_m$: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{L}_m(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_m$. En este sentido nos referiremos al SED como $\mathcal{A}$.

Sea $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_{nc}$, una partición donde $\Sigma_c$ representa el conjunto de eventos controlables y $\Sigma_{nc}$ representa el conjunto de eventos no controlables.

Asumamos que la función de transición de $\mathcal{A}$ puede ser controlada por un agente externo, en el sentido que los eventos controlables pueden ser permitidos o inhabilitados por un controlador externo. Entonces, el generador $\mathcal{A}$ puede ser conectado con un controlador (supervisor) $S$ en un lazo de realimentación. Formalmente, sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \mathcal{E}, q_0, Q_m)$ un autómata determinístico, y sea $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_{nc}$ una partición de $\Sigma$. Un supervisor $S$ para $\mathcal{A}$ es cualquier función $S: \mathcal{L}(\mathcal{A}) \to \Gamma := \{\gamma \in 2^\Sigma : \Sigma_{nc} \subseteq \gamma\}$ .

Nosotros ahora acoplaremos las ideas establecidas para control.

Para cada $s \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ bajo el control de $S$ , $S(s) \cap \mathcal{E}(\delta(q_0, s))$ es el conjunto de eventos permitidos que $\mathcal{A}$ puede ejecutar en el estado $\delta(q_0, s)$. Llamaremos a $S(s)$

patrón de control en $s$. El sistema resultante será denotado $S/\mathcal{A}$. El lenguaje generado por $S/\mathcal{A}$ es dado recursivamente por:

(i) $\theta \in \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$; (ii) Para $s \in \Sigma^*$ y $\alpha \in \Sigma$ se tiene que: $s \in \mathcal{L}(S/\mathcal{A}), s\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}), \alpha \in S(s) \Leftrightarrow s\alpha \in \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$.

El lenguaje marcado por $S/\mathcal{A}$ es dado por $\mathcal{L}_m(S/\mathcal{A}) = \mathcal{L}(S/\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_m(\mathcal{A})$.

Es claro que $\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$ es cerrado. Más aún, $\emptyset \subseteq \mathcal{L}_m(S/\mathcal{A}) \subseteq \overline{\mathcal{L}_m(S/\mathcal{A})} \subseteq \mathcal{L}(S/\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$. En lo que sigue, con abuso de lenguaje, diremos que un supervisor $S$ para $\mathcal{A}$ es bloqueado si $S/\mathcal{A}$ es bloqueado. Luego, como $\mathcal{L}_m(S/\mathcal{A})$ consiste en los elementos de $\mathcal{L}_m(\mathcal{A})$ que "sobreviven" bajo el control de $S$, entonces el bloqueo significa que el sistema controlado no puede finalizar la ejecución de la tarea.

### 2.3 Caracterización de lenguajes controlables

Estamos interesados en saber bajo cuáles condiciones un sublenguaje $K$ de $\mathcal{L}$ puede ser llevado a cabo por un supervisor $S$.

Definición 1 Dado un SDED $\mathcal{A}$ con $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ su conjunto de eventos no controlables. Sea $K \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$, $K \neq \emptyset$, tenemos: (i) $K$ será llamado $\mathcal{L}_m(\mathcal{A})$–cerrado si $K = \overline{K} \cap \mathcal{L}_m(\mathcal{A})$; y (ii) $K$ será llamado controlable con respecto a $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ y $\Sigma_{nc}$ si $\overline{K}\Sigma_{nc} \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \overline{K}$.

La condición (ii) de la definición 1 es un concepto fundamental del control supervisorio, que significa que un lenguaje puede ser llevado a cabo bajo control si, y solamente si, no hay continuaciones de palabras en el lenguaje por eventos no controlables, físicamente posibles, que estén fuera de dicho lenguaje. Más aún, por definición, K es controlables si, y solamente si, su clausura lo es.

Teorema 1 Sea $K \subseteq \mathcal{L}_m(\mathcal{A})$, $K \neq \emptyset$. Sea $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ el conjunto de eventos no controlables de $\mathcal{A}$. Existe un supervisor no bloqueado $S$ para $\mathcal{A}$ tal que $K = \mathcal{L}_m(S/\mathcal{A})$ sí, y solo sí, $K$ es $\mathcal{L}_m(\mathcal{A})-$cerrado y controlable con respecto a $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ y $\Sigma_{nc}$.

Desde este último resultado enfatizamos la existencia del supervisor $S(s) = \Sigma_{nc} \cup \{\alpha \in \Sigma_c : s\alpha \in \overline{K}\}$ para asuntos de construcción.

Corolario 1 Sean $K \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$, $K \neq \emptyset$, y sea $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ el conjunto de eventos no controlables de $\mathcal{A}$. Existe un supervisor $S$ para $\mathcal{A}$ tal que $K = \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$ sí, y solo sí, $K$ es cerrado y controlable con respecto a $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ y $\Sigma_{nc}$.

Corolario 2 Sea $K \subseteq \mathcal{L}_m(\mathcal{A})$, $K \neq \emptyset$, y sea $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ el conjunto de eventos no controlables del SDED $\mathcal{A}$. Existe un supervisor $S$ para $\mathcal{A}$ tal que $\overline{K} = \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$ sí, y solo sí, $K$ es controlable con respecto a $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ y $\Sigma_{nc}$.

Como ha sido establecido, dados un SDED $\mathcal{A}$ y $K \subseteq \mathcal{L}_m(\mathcal{A})$, si existe un supervisor $S$ para $\mathcal{A}$ tal que $\overline{K} = \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$ entonces $K$ es un lenguaje controlable. Adicionalmente, si $K$ es $\mathcal{L}_m(\mathcal{A})$ –cerrado entonces obtenemos que $K = \mathcal{L}_m(S/\mathcal{A})$, donde $S$ es no bloqueado.

Para propósitos de implementación, queremos tener una representación de $S$ mediante un autómata determinístico. Esta representación será llamada una realización de $S$. Por lo tanto, cuando los lenguajes $\mathcal{L}(\mathcal{A}), \mathcal{L}_m(\mathcal{A})$ y $K$ sean regulares, entonces la representación será finita y en consecuencia implementable. Más precisamente, sin pérdida de generalidad supongamos que el dominio de $S$ es $\mathcal{L}(S/\mathcal{A})$.

Sea $\mathcal{R} = (X, \Sigma, \delta_{\mathcal{R}}, \mathcal{E}_{\mathcal{R}}, x_0, X)$ un autómata determinístico limpio tal que $\overline{K} = \mathcal{L}(\mathcal{R}) = \mathcal{L}_m(\mathcal{R})$, entonces el autómata producto $\mathcal{A} \times \mathcal{R}$ es tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A} \times \mathcal{R}) = \mathcal{L}(\mathcal{R}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \overline{K} \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \overline{K} = \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$ y $\mathcal{L}_m(\mathcal{A} \times \mathcal{R}) = \overline{K} \cap \mathcal{L}_m(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(S/\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_m(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_m(S/\mathcal{A})$.

Por lo tanto, hemos construido una representación de $S$ que en caso de un lenguaje regular $K$ solo requiere memoria finita.

### 2.4 Aproximaciones a lenguajes no controlables

Dado que Posiblemente los sublenguajes de $\mathcal{L}$ no son controlables, nosotros incluiremos esta sección.

Teorema 2 Sea $\{K_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de lenguajes, $K_i \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$ para todo $i \in I$. Entonces tenemos que: si los $K_i$ son controlables, entonces $\bigcup_{i\in I} K_i$ es controlable y si los $K_i$ son controlables y cerrados, entonces $\bigcap_{i\in I} K_i$ es controlable y cerrada.

Sea $K \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$ y consideremos el conjunto $C_{\subset}(K) = \{\mathcal{L} \subseteq K : \overline{\mathcal{L}}\Sigma_{nc} \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \overline{\mathcal{L}}\}$. Claramente $C_{\subset}(K)$ es no vacío, puesto que $\emptyset \in C_{\subset}(k)$. Más aún, $C_{\subset}(K)$ es un conjunto ordenado parcialmente, por la inclusión de conjuntos. Luego, por el Teorema 2, se tiene que $C_{\subset}(K)$ posee como supremo a $K_{sup} = \bigcup_{\mathcal{L}\in C_{\subset}(K)} \mathcal{L}$.

Notemos que si $K$ es controlable, entonces $K_{sup} = K$. Ahora, $K_{sup}$ no necesariamente es cerrado; por lo tanto, incluiremos el resultado siguiente.

Teorema 3 Tenemos las siguientes afirmaciones: si $K \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$ es cerrado, entonces $K_{sup}$ es cerrado; si $K \subseteq \mathcal{L}_m(\mathcal{A})$ es $\mathcal{L}_m(\mathcal{A})$–cerrado, entonces $K_{sup}$ es $\mathcal{L}_m(\mathcal{A})$–cerrado; y $\overline{K_{sup}} \subseteq \overline{K}_{sup}$.

## 3 Problemas de Control

Dadas las herramientas aportadas desde el control supervisorio, nosotros podemos establecer algunos problemas básicos junto con sus correspondientes soluciones, necesarios para la formulación de nuestro enfoque modular, que más adelante nos proveerán de los argumentos teóricos que determinan las condiciones de existencia de los supervisores locales.

### 3.1 Problema Básico de Control

Dados un SDED $\mathcal{A}$, el conjunto de eventos no controlables $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{L}_p = \overline{\mathcal{L}_p} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$, construir un supervisor $S$ para $\mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_p$; y si $S'$ es otro supervisor para $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{L}(S'/\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_p$, entonces $\mathcal{L}(S'/\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$.

Solución: Como $\mathcal{L}_p$ es cerrado entonces $(\mathcal{L}_p)_{sup}$ es cerrado (ver Teorema 3). Luego, $(\mathcal{L}_p)_{sup} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$ es cerrado y controlable. Así, por el Corolario 1 se sigue que existe un supervisor $S$ para $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) = (\mathcal{L}_p)_{sup} \subseteq \mathcal{L}_p$. Más aún, si $S'$ es otro supervisor tal que $\mathcal{L}(S'/\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_p$, entonces $\mathcal{L}(S'/\mathcal{A}) \in \mathcal{C}_{\subset}(\mathcal{L}_p)$ ; pero $(\mathcal{L}_p)_{sup}$ es el más grande de estos. Por lo tanto, $\mathcal{L}(S'/\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$. En consecuencia, para la solución del problema básico de control, basta tomar $S$ tal que $\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) = (\mathcal{L}_p)_{sup}$, siempre que $(\mathcal{L}_p)_{sup} \neq \emptyset$ . Finalmente, si $\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) = (\mathcal{L}_p)_{sup}$ es un lenguaje regular, entonces podemos construir una realización del supervisor $S$, la cual es un Autómata Finito Determinístico (AFD) que representa a $(\mathcal{L}_p)_{sup}$.

### 3.2 Problema de Control sin Bloqueo

Dados un SDED $\mathcal{A}$, $\Sigma_{nc} \subseteq \Sigma$ y un lenguaje marcado $\mathcal{L}_{p_m} \subseteq \mathcal{L}_m(\mathcal{A})$, $\mathcal{L}_m(\mathcal{A})$–cerrado, construir un supervisor no bloqueado $S$ tal que $\mathcal{L}_m(S/\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_{p_m}$ ; y para cualquier otro supervisor no bloqueado $S'$ tal que $\mathcal{L}_m(S'/\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_{p_m}$ se tiene que $\mathcal{L}(S'/\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$.

Solución: procediendo de manera análoga que en el problema anterior, y usando los resultados de las secciones precedentes, la solución es seleccionar $S$ tal que $\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) = \overline{(\mathcal{L}_{p_m})_{sup}}$ , siempre que $(\mathcal{L}_{p_m})_{sup} \neq \emptyset$ . Es importante notar que bajo el supuesto que $\mathcal{L}_{p_m}$ es $\mathcal{L}_m(\mathcal{A})$ –cerrado, $(\mathcal{L}_{p_m})_{sup}$ es igualmente $\mathcal{L}_m(\mathcal{A})$ –cerrado. Esto garantiza que la elección de $S$ resulte en un sistema $S/\mathcal{A}$ no bloqueado.

Ahora, si $(\mathcal{L}_{p_m})_{sup}$ es regular entonces $S$ puede ser realizado por construcción de una representación AFD de $\overline{(\mathcal{L}_{p_m})_{sup}}$.

## 4 Control Modular y Consenso

En esta sección presentaremos los resultados teóricos más relevantes en este artículo que corresponden a una situación de control modular de un SDED con subsistemas que interactúan para reproducir decisiones. Estas decisiones estarán expresadas naturalmente por planificaciones locales proyectadas desde una planificación global dada. Este hecho está centrado en los conceptos de $k$–interacción y consenso.

### 4.1 Construcción del Modelo

Nosotros siempre obtendremos un SDED $\mathcal{A}$ mediante la composición paralela de los autómatas individuales $\mathcal{A}_i$ de las componentes del sistema, tal como fue expresado en los preliminares.

Como es bien conocido, para cualesquiera $\mathcal{L}_i$ y $\mathcal{L}_{m_i}$ existe un autómata determinístico $\mathcal{A}_i$ tal que $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$ y $\mathcal{L}_{m_i} = \mathcal{L}_m(\mathcal{A}_i)$. Luego, en lo que sigue nos referiremos a la componente $i$–ésima del SDED como $\mathcal{A}_i$. Por lo tanto, $\mathcal{L} = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{L}_i)$ y $\mathcal{L}_m = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{m_i})$ representan los lenguajes generado y marcado del SDED respectivamente, donde las $\pi_i$ son las proyecciones canónicas. Así, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\|_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$ y $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(\|_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$. En este sentido referenciamos al SDED como $\mathcal{A} = \|_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$.

En lo que sigue, entenderemos que una planificación, tal como es referida en (Mata, G., y col., 2018), es considerada para el logro de objetivos. Más precisamente, dado un SDED $\mathcal{A}$ , con $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_m$ representando respectivamente los lenguajes generado y marcado por $\mathcal{A}$; la planificación será dada como un sublenguaje $\mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{L}$ o más restrictivamente como un sublenguaje $\mathcal{L}_{p_m} \subseteq \mathcal{L}_m$.

Definición 2 Dado un lenguaje de planificación $\mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{L}$ (respectivamente, un lenguaje de planificación marcado $\mathcal{L}_{p_m} \subseteq \mathcal{L}_m$). Para cada $j$, $j = 1, \dots, n$; $\mathcal{L}_{p_j} = \pi_j(\mathcal{L}_p)$ será llamado planificación local (respectivamente, $\mathcal{L}_{p_{m_j}} = \pi_j(\mathcal{L}_{p_m})$ será llamada planificación marcada local) para $\mathcal{A}_j$.

Proposición 1 Dado un lenguaje de planificación $\mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{L}$ (respectivamente, un lenguaje de planificación marcado $\mathcal{L}_{p_m} \subseteq \mathcal{L}_m$), entonces $\mathcal{L}_{p_j} \subseteq \mathcal{L}_j$ para cada $j$, $j = 1,2, \dots, n$ (respectivamente, $\mathcal{L}_{p_{m_j}} \subseteq \mathcal{L}_{m_j}$).

Demostración: $\mathcal{L}_{p_j} = \pi_j(\mathcal{L}_p) \subseteq \pi_j(\mathcal{L}) = \pi_j(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{L}_i)) \subseteq \pi_j(\pi_j^{-1}(\mathcal{L}_j)) = \mathcal{L}_j$, pues $\pi_j$ es sobreyectiva para cada $j$. Así, $\mathcal{L}_{p_j} \subseteq \mathcal{L}_j$, para todo $j$, $j = 1,2, \dots, n$. Análogamente se puede demostrar que $\mathcal{L}_{p_{m_j}} \subseteq \mathcal{L}_{m_j}$, para cada $j$, $j = 1,2, \dots, n$. ∎

Teorema 4 Dado un lenguaje de planificación $\mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{L}$ para $\mathcal{A}$ (respectivamente, un lenguaje de planificación marcado $\mathcal{L}_{p_m} \subseteq \mathcal{L}_m$ para $\mathcal{A}$). Sea para cada $j$, $j = 1,2,\ldots,n$, $\mathcal{L}_{p_j} = \pi_j(\mathcal{L}_p)$ la planificación local para $\mathcal{A}_j$ (respectivamente, $\mathcal{L}_{p_{m_j}} = \pi_j(\mathcal{L}_{p_m})$ la planificación marcada local para $\mathcal{A}_j$). Entonces, $\mathcal{L}_p = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})$ (respectivamente $\mathcal{L}_{p_m} = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_{m_i}})$).

Demostración: Claramente $\mathcal{L}_p \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)$. Por otro lado, para cada $j$, $j = 1,2,\ldots,n, \pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right) \subseteq \mathcal{L}_p$; de donde, $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i}) \subseteq \mathcal{L}_p$ .Luego, $\mathcal{L}_p = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)$. Análogamente, se puede demostrar que $\mathcal{L}_{p_m} = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_{m_i}})$. ∎

El Teorema 4 dice que se puede establecer sobre un SDED análisis global desde un punto de vista local.

Proposición 2 Para cada $j, j = 1,2,\ldots,n$, $\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right) \subseteq \mathcal{L}$.

Demostración: $w \in \pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right) \Rightarrow \pi_i(w) \in \mathcal{L}_{p_j} = \pi_j(\mathcal{L}_p) \Rightarrow w \in \mathcal{L}_p$. Luego, $\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right) \subseteq \mathcal{L}$, para todo $j$, $j = 1,2,\ldots,n$. ∎

Teorema 5 Para cada $j, j = 1,2,\ldots,n, \mathcal{L}_{p_j}$ es cerrado.

Demostración: Sea $w \in \overline{\mathcal{L}_{p_j}} = \overline{\pi_j(\mathcal{L}_p)}$, entonces existe $s \in \Sigma_j^*$ tal que $ws \in \pi_j(\mathcal{L}_p)$. Sea $t = t_1 t_2 \in \mathcal{L}_p$ tal que $\pi_j(t) = \pi_j(t_1)\pi_j(t_2) = ws$, con $\pi_j(t_1) = w$ y $\pi_j(t_2) = s$. Como $\mathcal{L}_p$ es cerrado, entonces $t_1 \in \mathcal{L}_p$; de donde, $w = \pi_j(t_1) \in \pi_j(\mathcal{L}_p)$. Luego, $\mathcal{L}_{p_j}$ es cerrado. ∎

Corolario 3 Para cada $j$, $j = 1,2,\ldots,n$, $\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right)$ es cerrado.

Demostración: Sea $w \in \overline{\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right)}$, entonces existe $\boldsymbol{s} \in \Sigma^*$ tal que $ws \in \pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right)$; es decir, $\pi_j(ws) \in \mathcal{L}_{p_j}$. Así, $\pi_j(w)\pi_j(s) \in \mathcal{L}_{p_j}$ ; de donde, $\pi_j(w) \in \mathcal{L}_{p_j}$ (por el Teorema 5); es decir, $w \in \pi_j^{-1}(\mathcal{L}_{p_j})$. Luego, $\pi_j^{-1}(\mathcal{L}_{p_j})$ es cerrado. ∎

Desde el corolario 3 se sigue que $\mathcal{L}_p$ es la intersección de sublenguajes cerrados de $\mathcal{L}$. Ahora, en la composición paralela la selección de los eventos comunes entre las componentes permite establecer las interacciones entre estas, además de una reducción en la implementación.

Definición 3 Sea $\mathcal{A}$ como antes. Un evento $\alpha \in \Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ será llamado una $k$–interacción en $\mathcal{A}$ si cada vez que ocurre $\alpha$ ella produce cambios en $k$ componentes, $k \leq n$.

Definición 4 Sea $\mathcal{A}$ un SDED representado por la composición paralela, y sea $\mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{L}$ un lenguaje de planificación para $\mathcal{A}$. Para cualesquiera $q = \delta(q_0, s)$ y $\alpha \in \mathcal{E}(q)$ una $k$–interacción, sean $j_1, j_2, \ldots, j_k$ los índices de las componentes de cambio por la ocurrencia de $\alpha$ en $q$. Diremos que $\alpha$ es obtenida por consenso si $\forall\, j_l$, $l = 1,\ldots,k$ se tiene que $\pi_{j_l}(s)\alpha \in \mathcal{L}_{p_{j_l}}$.

Notemos desde las definiciones 3 y 4 que en presencia del control supervisorio ahora los eventos pueden ser clasificados como $k$–interacciones controlables o no controlables, obtenidas por consenso. Esto permitirá en la construcción de nuestro modelo $S/\mathcal{A}$ la restricción y precisión de las componentes cooperantes bajo consenso, de manera controlada.

## 5 Aplicaciones

Aplicación 1*: El problema modular básico*

En el aparte anterior, $\mathcal{L}_p$ fue expresado como una descomposición de sublenguajes cerrados de $\mathcal{L}: \mathcal{L}_p = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})$, con $\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})$ un sublenguaje cerrado de $\mathcal{L}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Teorema 6 Existe un supervisor $S$ para $\mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_m(S/\mathcal{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup} \cap \mathcal{L}_m\right) \tag{5}$$

Demostración: Desde el problema básico de control supervisorio podemos sintetizar, para cada $j$, $j = 1,2,\ldots,n$, un supervisor $S_j$ para $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{L}(S_j/\mathcal{A}) = \left(\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right)\right)_{sup}$, el cual es el más grande de todos los cerrados y controlables contenidos en $\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right)$. Sea $S$ el supervisor definido por $S(s) = \bigcap_{i=1}^{n} S_i(s)$. Entonces, por definición $\theta \in \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$ y $\theta \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}(S_i/\mathcal{A})$; además, para cualesquiera $s \in \Sigma^*$ y $\alpha \in \Sigma$ tenemos que

$$\begin{aligned} s\alpha \in \mathcal{L}(s \setminus \mathcal{A}) &\Leftrightarrow s \in \mathcal{L}(S \setminus \mathcal{A}), s\alpha \in \mathcal{L}, \alpha \in S(s) \\ &\Leftrightarrow s \in \mathcal{L}(S_i \setminus \mathcal{A}), \alpha \in S_i(s); i = 1,\ldots,n, s\alpha \in \mathcal{L} \\ &\Leftrightarrow s\alpha \in \mathcal{L}(S_i \setminus \mathcal{A}), \quad i = 1,\ldots,n \qquad (6) \\ &\Leftrightarrow s\alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}(S_i \setminus \mathcal{A}) \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup}$. En consecuencia, $\mathcal{L}_m(S/\mathcal{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}_m\,(S_i/\mathcal{A})$. ■

Teorema 7 $\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)\right)_{sup} = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup}$.

Demostración: Como $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right) \subseteq \pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right)$ para todo $j$, $j = 1,2,\ldots,n$; entonces $\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)\right)_{sup} \subseteq \left(\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right)\right)_{sup}$, para todo $j$, con $j = 1,2,\ldots,n$; en consecuencia $\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)\right)_{sup} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup}$. Por otro lado, como los $\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right)$ son cerrados, entonces los $\left(\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_j}\right)\right)_{sup}$ son también cerrados (ver Teorema 3), y controlables por definición; de donde, $\bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup}$ es un cerrado y controlable contenido en $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)$; pero $\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)\right)_{sup}$ es el más grande de todos los controlables contenidos en $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)$ ; así, $\bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup} \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)\right)_{sup}$. Luego $\bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)\right)_{sup}$. ■

Note que desde el problema básico de control supervisorio es garantizada la existencia de un supervisor $\overline{S}$ óptimo tal que $\mathcal{L}(\overline{S}/\mathcal{A}) = \left(\mathcal{L}_p\right)_{sup}$, y este puede ser construido usando el supervisor dado en el Teorema 1, sin embargo, a partir los Teorema 6 y Teorema 7 obtenemos la existencia de un supervisor $S$ para $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_i}\right)\right)_{sup} = \left(\mathcal{L}_p\right)_{sup}$, lo cual determina la solución óptima pero desde la descomposición de $\mathcal{L}_p$ por control modular, bajo consenso. Esto es muy importante porque además de reducir considerablemente el número de operaciones necesarias para construir el supervisor que da solución óptima al problema básico de control modular (ver demostración del Teorema 6), permite llevar bajo control de manera óptima la planificación global desde las planificaciones locales.

Finalmente, para propósitos de implementación, si $\mathcal{R}_i$ es una realización de $S_i$ , $i = 1,2,\ldots,n$ entonces $\left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup} = \mathcal{L}(\mathcal{R}_i) = \mathcal{L}_m(\mathcal{R}_i) = \mathcal{L}(S_i/\mathcal{A})$ . Esto implica que $(\mathcal{A} \times \mathcal{R}_i) = \mathcal{L}(S_i/\mathcal{A}) = \left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup}$ y $\mathcal{L}_m(\mathcal{A} \times \mathcal{R}_i) = \mathcal{L}_i(S_i/\mathcal{A}), i = 1,\ldots,n$. Sea $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \times \cdots \times \mathcal{R}_n$ , entonces $\mathcal{L}(\mathcal{A} \times \mathcal{R}) = \mathcal{L} \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}\,(\mathcal{R}_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}\,(S_i/\mathcal{A}) = \mathcal{L}(S/\mathcal{A})$ y $\mathcal{L}_m(\mathcal{A} \times \mathcal{R}) = \mathcal{L}_m \cap \mathcal{L}_m(\mathcal{R}) = \mathcal{L}_m \cap \mathcal{L}(S/\mathcal{A}) = \mathcal{L}_m(S/\mathcal{A})$.

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es una realización de $S$; sin embargo, nosotros siempre consideraremos una realización construida desde los $\mathcal{R}_i$ como sigue: realizar el patrón de control $S(s)$ mediante la intersección de los conjuntos de eventos activos de los $\mathcal{R}_i$ y sus respectivos estados alcanzables después de la ejecución de $s$. Este enfoque reduce claramente el cardinal del conjunto de estados de la realización de $S$. Adicionalmente, si $\mathcal{L}_p$ es un lenguaje regular entonces $\left(\mathcal{L}_p\right)_{sup}$ también lo es; en consecuencia, siempre podremos construir una realización de $S$, la cual es un AFD que representa a $\left(\mathcal{L}_p\right)_{sup}$.

### *Aplicación 2: El problema modular sin bloqueo*

Sea $\mathcal{L}_{p_m} \subseteq \mathcal{L}_m$ un lenguaje de planificación marcado, y sean para cada $j$, $j = 1,2,\ldots,n$; $\mathcal{L}_{p_{m_j}}$ los lenguajes de planificaciones locales marcados. Sabemos que por el Teorema 4 , $\mathcal{L}_{p_m} = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)$, lo cual es interpretado como que la planificación global marcada puede ser dada desde las planificaciones locales marcadas; y en consecuencia la modelación, análisis y control pueden ser expresados desde las proyecciones inversas (localmente).

Proposición 3 Para cada $j$, $j = 1,2,\ldots,n$, los lenguajes $\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right)$ son sublenguajes de $\mathcal{L}_m$, los cuales son $\mathcal{L}_m$ – cerrados.

Demostración: Como $\mathcal{L}_{p_m} \subseteq \mathcal{L}_m$ entonces $\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right) \subseteq \mathcal{L}_m$ , para todo $j$ , $j = 1,2,\ldots,n$; en consecuencia, $\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right) \subseteq \overline{\left(\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right)\right)} \cap \mathcal{L}_m$. Por otro lado, como $\mathcal{L}_{p_m}$ es $\mathcal{L}_m$ – cerrados, entonces $w \in \overline{\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right)} \cap \mathcal{L}_m$ implica que existe $s \in \Sigma^*$ tal que $ws \in \pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right)$, $w \in \mathcal{L}_m$; de donde, $\pi_j(ws) \in \mathcal{L}_{p_{m_j}} = \pi_j\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right)$, $w \in \mathcal{L}_m$; así, $ws \in \mathcal{L}_{p_m}$, $w \in \mathcal{L}_m$; con lo cual, $w \in \overline{\mathcal{L}_{p_m}} \cap \mathcal{L}_m$; de donde, $w \in \mathcal{L}_{p_m}$ ; en consecuencia, $\pi_j(w) \in \pi_j\left(\mathcal{L}_{p_m}\right) = \mathcal{L}_{p_{m_j}}$ ; luego, $w \in \pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right)$ .Así, $\overline{\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right)} \cap \mathcal{L}_m \subseteq \pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right)$. Por lo tanto, para cada $j$ , $j = 1,2,\ldots,n$, $\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right) = \overline{\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right)} \cap \mathcal{L}_m$. ■

Teorema 8 Para cada $j$, $j = 1,2,\ldots,n$, sea $S_j$ un supervisor no bloqueado para $\mathcal{A}$. Entonces, $S(s) = \bigcap_{i=1}^{n} S_i\,(s)$ es no bloqueado si, y solo si, $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}_m(S_i/\mathcal{A})} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{L}_m(S_i/\mathcal{A})}$

Demostración: Supongamos que $S$ es no bloqueado, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{L}_m(S_i/\mathcal{A})} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}_m(S_i/\mathcal{A})}$. Recíprocamente, si $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}_m(S_i/\mathcal{A})} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{L}_m(S_i/\mathcal{A})}$, entonces $\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{L}_m(S/\mathcal{A})}$. Ahora, desde la Proposición 3 y el problema de control supervisorio sin bloqueo, tenemos que existe un supervisor no bloqueado óptimo $S_j$ para $\mathcal{A}$, $j$, $j = 1,2,\dots,n$, tal que $\mathcal{L}(S_j/\mathcal{A}) = \overline{\left(\pi_j^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_j}}\right)\right)_{sup}}$. Luego, si $S$ es como en el Teorema 1, entonces $\mathcal{L}(S/\mathcal{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}(S_i/\mathcal{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\left(\pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)\right)_{sup}}$ y $\mathcal{L}_m(S/\mathcal{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)\right)_{sup}$, pero $\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)\right)_{sup} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)\right)_{sup} = \left(\mathcal{L}_{p_m}\right)_{sup}$, de donde, $\left(\mathcal{L}_{p_m}\right)_{sup} \subseteq \mathcal{L}_m(S/\mathcal{A})$. Por lo tanto, $S$ podría ser bloqueado. Finalmente, desde el Teorema 8 se sigue que $S$ es no bloqueado si, y solo si $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)\right)_{sup}} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\left(\pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)\right)_{sup}}$. ■

Esta última condición es referida para expresar que los $\left(\pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)\right)_{sup}$ no están en conflicto. Enfatizamos, por otro lado, que la existencia de un supervisor no bloqueado $\overline{S}$ para $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{L}(\overline{S}/\mathcal{A}) = \overline{\left(\mathcal{L}_{p_m}\right)_{sup}}$ está garantizada desde el problema de control supervisorio sin bloqueo; sin embargo, $\overline{S}$ no sigue constructivamente al supervisor $S$ debido a un posible conflicto. En caso contrario, el supervisor $S$ permitirá, como hemos demostrado anteriormente, la implementación mediante una realización óptima desde el punto de vista del número de operaciones para su construcción.

## Conclusión

Dada la disponibilidad de la composición paralela y sus correspondientes comportamientos no controlables; la cual determina el acoplamiento, y dada la planificación $\mathcal{L}_p$, podemos aplicar los argumentos teóricos expuestos en la sección 4. En verdad, se trata de construir un supervisor local de manera que la acción conjunta de estos no genere problemas indeseables entre las condiciones impuestas en el sistema, sujetas a la planificación. Estos controladores, junto con sus correspondientes realizaciones, permiten finalmente la implementación de AFD del sistema en el sentido estricto expuesto en la sección previa. Para la construcción de los supervisores locales existen diversas técnicas de síntesis, por ejemplo (Wonham 2015). Para concluir, el modelo de un sistema por composición paralela, en relación con la cooperación entre sus subsistemas por consenso, puede ser incluido para el estudio de las k-interacciones cuando dichos subsistemas consideran algunas restricciones locales. En efecto, si el número de restricciones crece entonces seguramente se generarán nuevas interacciones indeseables entre estas, produciendo problemas de funcionalidad en el sistema. Sin embargo, nuevamente el control modular permite detectar y dar solución al problema mediante el diseño de controladores locales para llevar el comportamiento dinámico sin interacciones indeseables.

En relación con el formalismo desarrollado para la modelación, análisis y control bajo consenso, nosotros podemos ver que las soluciones de los problemas básicos y sin bloqueo promueven el estudio de la operación sup. En efecto, la descomposición de una planificación mediante la composición paralela muestra que si los lenguajes de planificaciones locales $\mathcal{L}_{p_i}$ (respectivamente $\mathcal{L}_{p_{m_i}}$ ) son regulares entonces los $\pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{p_i}}\right)$ (respectivamente $\pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)$) son regulares; de donde, los $\left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)_{sup}$ (respectivamente $\left(\pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)\right)_{sup}$ ) también lo son; y en consecuencia

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}\left(\mathcal{L}_{p_{m_i}}\right)\right)_{sup} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_i^{-1}(\mathcal{L}_{p_i})\right)\right)_{sup} = \left(\mathcal{L}_p\right)_{sup} \tag{6}$$

es regular. Así, los controladores que proporcionan la solución a los problemas pueden ser realizados localmente por AFD, y estos pueden ser resueltos automáticamente por algoritmos. Por lo tanto, este diseño permite la síntesis de controladores que aseguran el cumplimiento de una planificación dada en sistemas complejos.

## Referencias

Aldaniyazov KN, 2018. Main Factors for the Improvement of a Complex System of Strategic Production Cost Management, Revista Espacios, 39(11), pp. 29.

Al-Jaar RY, Desrochers AA, 1990. Petri nets in automation and manufacturing, Advances in Automation and Robotics, 2, pp. 153-225.

Arias L, Agurto W, Chávez Á, Pantoja R, Pinto A, 2018. Decisions in Hierarchical production planning: goals, heuristics. Revista Espacios, 30(14), pp 3.

Caspi P, 1991. Model of Discrete event systems in computer science, Proc. ECC 91, European control

conference, Grenoble, France.
Dante O, Coromings A, Lusa A, 2007. Estado del arte sobre planificación agregada de la producción. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña. Instituto de la Organización y Sistemas Industriales, Barcelona.
De Souza H, Loureiro G, 2018. Proosta de um modelo de planeamiento estratégico basado em engenharia de sistemas, Revista Espacios, 39(13), pp. 10.
Eilenberg S, 1974. Automata, languages, and machines, Academic Press, New York.
Gradišar D, Mušič G, 2007. Production-process modelling based on production-management data: A Petri-net approach. International Journal of Computer Integrated Manufacturing 20(8), pp. 794-810.
Jia GZ, Cheng Y, 2007. Reengineering method of production system based on theory of constraint and system dynamics. Computer Integrated Manufacturing Systems, 4.
Hong-Sen Y, Xiao-Dong Zhang, Min J, 2004. Hierarchical production planning with demand constraints. Computers & Industrial Engineering 46(3), pp. 533-551.
Hopcroft J, Motwani R, Ullman J, 1979, Automata theory, languages and computation, Addison Wesley, Press Reading. Massachusetts.
Mata G, Lugo A, Rojas G, 2016 Aplicación de bases de Gröbner en el problema de alcanzabilidad de estados de sistemas de eventos discretos modelados por redes de Petri, Lecturas Matemáticas, 37(1), pp. 5-23.
Mata G, Ruiz B, Camacho C, Méndez A, Muñoz S, Zambrano H, 2018. A planning algorithm in a class of discrete event system, DYNA. 85(206), 283-293.
Wonham W, 2015. Design Software: TCT, Systems Control Group, Dept. of ECE, Univ. of Toronto. http://www.control.toronto.edu/DES.

***Recibido:*** *05 de junio de 2021*

***Aceptado:*** *10 de octubre de 2021*

***Demera-Reyna, Carla:*** *Ingeniero Eléctrico. Instituto de posgrado. Universidad Técnica de Manabí.*
***https://orcid.org/0000-0003-2209-7002.***

***Mata-Diaz, Guelvis:*** *Licenciado en Matemáticas. Magister Scientiae en Matemáticas. Doctor en Ciencias Aplicadas. Profesor Titular activo. Facultad de Ciencias ULA. Departamento de Matemáticas. Línea de investigación: análisis y control en sistemas dinámicos de eventos discretos. Correo electrónico: gematad2017@gmail.com,*
***https://orcid.org/0000-0001-7147-1422.***

***Ruiz-Leal, Bladismir:*** *Licenciado en Matemáticas. Magister en Matemáticas. Doctor en Ciencias. Profesor activo de la Universidad Técnica de Manabí. Ciencias Básicas UTM. Línea de investigación: sistemas dinámicos y teoría ergódica. Correo electrónico: bladismir@gmail.com,*
***https://orcid.org/0000-0002-7737-3847.***