Artículo de Investigación. Revista Ciencia e Ingeniería. Vol. 45, No. 3, pp. 289-294, agosto-noviembre, 2024.
ISSN 1316-7081. ISSN Elect. 2244-8780 Universidad de los Andes (ULA)

Control robusto de un proceso de flujo de calor empleando la optimización lineal

Robust control for a heat flow process using linear optimization

Teppa-Garran, Pedro[1*]; Leizaola, Isabella[2]
[1]Departamento de Gestión de Proyectos y Sistemas, Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela.
[2]Coordinación de Matemáticas Industriales, Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela.
[*]pteppa@unimet.edu.ve

Resumen

Utilizando resultados algebraicos conocidos, el principio del modelo interno y un criterio de garantía de polos dominantes que permite expresar especificaciones temporales de la salida controlada a través de un polinomio deseado a lazo cerrado; se plantea una ecuación Diofantina. Esta ecuación incorpora elementos de incertidumbre tipo intervalo provenientes de los parámetros del modelo matemático de un proceso de flujo de calor. Posteriormente, la ecuación Diofantina se formula como un problema de optimización lineal cuya solución resulta en un controlador robusto que garantiza el seguimiento de perfiles de temperatura que varían en forma escalonada y el rechazo a perturbaciones constantes para el proceso de flujo de calor.

Palabras clave: Optimización lineal, Ecuación Diofantina, Incertidumbre paramétrica, Control robusto, Proceso de flujo de calor, Seguimiento de un perfil de temperatura.

Abstract

Using known algebraic results, the internal-model principle and a guarantee dominant-pole criterion that allows expressing temporal specifications of the controlled output into a desired closed-loop polynomial; a Diophantine equation is proposed. This equation incorporates elements of interval-type uncertainty coming from the parameters of the mathematical model of a heat flow process. Subsequently, the Diophantine equation is formulated as a linear optimization problem whose solution results in a robust controller that guarantees the tracking of temperature profiles that vary in a stepwise manner and the rejection of constant disturbances for the heat flow process.

Keywords: Linear optimization, Diophantine equation, Parametric uncertainty, Robust control, Heat flow process, Temperature-profile tracking.

1 Introducción

El control de temperatura es una actividad que aparece frecuentemente a nivel industrial. Las tareas más comúnes en las aplicaciones de control de temperatura son el control del punto de ajuste, el control uniforme de la temperatura y el seguimiento de un perfil de temperatura (Kaan y col. 2020). En este trabajo se está interesado en el seguimiento de perfiles de temperatura de tipo escalón y se emplea como aplicación el experimento de flujo de calor (EFC).

El EFC es un equipo desarrollado por *Quanser* (Quanser innovative Edutech, 2012) para apoyar el estudio de la transmisión de calor en un ducto de fibra de vidrio y el control de la temperatura en diferentes puntos donde se han localizado sensores. Es un proceso muy conveniente para el aprendizaje de fenómenos de dinámicas de fluidos y termodinámica, así como para la validación de estrategias de control de temperatura. Varios métodos de control de temperatura han sido aplicadas en el EFC. Entre ellos pueden mencionarse: controladores PID de orden fraccional (Ahn y col., 2009; Al-Saggaf y col., 2016; Jain y col., 2019; Jamil y col., 2022), el uso de algoritmos evolutivos con controladores PID de orden fraccional (Pradhan y col. 2019), el control por rechazo activo de perturbaciones (Al-Saggaf y col. 2021) y el empleo de circuitos de memristor con controladores PI (Orman, 2019) y con controladores PID de dos grados de libertad (Orman, 2022).

Las estrategias anteriores no consideran elementos de incertidumbre en el modelo del EFC. En este trabajo se propone un enfoque robusto donde el modelo del EFC se va a aproximar por una función de transferencia tipo intervalo y luego utilizando un enfoque polinómico se formula un problema de optimización lineal que permite determinar un controlador que garantiza el seguimiento de un perfil de temperatura que cambia escalonadamente dentro del dominio politópico de variación de los parámetros del modelo matemático del EFC.

El artículo está organizado de la siguiente manera. La sección 2 presenta el modelo matemático con incertidumbres paramétricas del EFC a través de una función de transferencia tipo intervalo, la sección 3 describe el método de diseño del controlador mediante la resolución de un problema de optimización lineal. En la sección 4 se ilustran los resultados de la aplicación del controlador en el EFC considerando el seguimiento de un perfil de temperatura escalonado en las temperaturas de los tres sensores y una prueba de rechazo a una perturbación de entrada tipo escalón después de que la temperatura en el tercer sensor ha alcanzado su punto de operación. Finalmente se incluyen las conclusiones del trabajo.

2 Experimento de flujo de calor

El aparato se muestra en la Fig. 1 donde se aprecia el ducto con los componentes siguientes: un elemento calentador y un soplador localizados en un extremo y tres sensores de temperatura a lo largo del ducto. La salida controlada corresponde a la temperatura y la señal de control es el voltaje aplicado al elemento calentador (el voltaje del soplador se mantiene constante). Se han identificado tres modelos para las temperaturas de cada sensor (Al-Saggaf y col., 2016). Los mismos vienen dados por las siguientes funciones de transferencia.

$$G_1(s) = \frac{0.3115}{s + 0.0286} e^{-0.3s} \tag{1}$$

$$G_2(s) = \frac{0.2179}{s + 0.0357} e^{-0.63s} \tag{2}$$

$$G_3(s) = \frac{0.2179}{s + 0.0357} e^{-0.85s} \tag{3}$$

Usando (1-3), en este trabajo el proceso de flujo de calor se va a representar a través de una función de transferencia de tipo intervalo de la forma

$$G_p(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} \tag{4}$$

Con

$$\begin{aligned} b_0 &\in [b_0^-, b_0^+] = [0.2179, 0.3115] \\ a_0 &\in [a_0^-, a_0^+] = [0.0286, 0.0357] \end{aligned} \tag{5}$$

Comentario 1: El modelo (4) con los parámetros cambiando en el interior de los intervalos (5) se usa exclusivamente para efectuar el diseño del controlador y posteriormente, éste se evalúa con cualquiera de los modelos (1-3) y de esta manera incluir el efecto del retardo de transporte en la simulación.

Fig. 1. Proceso de flujo de calor.
(Heat flow process)

3 Método

Considere el sistema de control de la Fig. 2 donde $\boldsymbol{y_r}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es la señal de referencia, $\boldsymbol{y}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es la salida controlada, $\boldsymbol{u}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la señal de control y $\boldsymbol{t}$ es la variable independiente del tiempo.

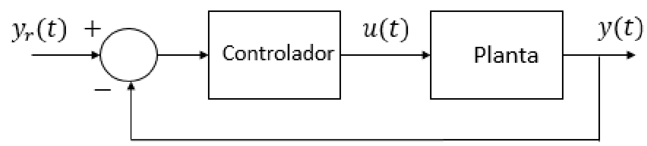

Fig. 2. Diagrama de bloques del sistema de control.
(Control System block diagram)

Se va a emplear un enfoque polinómico para efectuar el diseño del controlador, esta metodología ha sido desarrollada en forma exhaustiva en (Åström y col., 1997; Chen, 1987; Chen, 1999). Este enfoque se complementa con el principio del modelo interno (Francis y col., 1976; Hedberg y col., 2020) para asegurar el seguimiento de señales de referencia constantes. Al emplear la teoría de diseño polinómica resulta que el controlador $\boldsymbol{C(s)}$ debe tener la forma

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{m_1 s + m_0}{s(s + l_0)} \tag{6}$$

El diseño debe satisfacer para $\boldsymbol{N_c(s)}$ y $\boldsymbol{D_c(s)}$ la ecuación Diofantina (Åström y Wittenmark, 1997)

$$D_p(s) D_c(s) + N_p(s) N_c(s) = T(s) \tag{7}$$

Donde $\boldsymbol{N_p}$ y $\boldsymbol{D_p}$ son los polinomios numerador y denominador de la planta (4, 5), $\boldsymbol{N_c}$ y $\boldsymbol{D_c}$ los del controlador (6), el término $\boldsymbol{s}$ se incorpora (principio del modelo interno) para asegurar el seguimiento de una señal de referencia $\boldsymbol{y_r(t)}$

constante y; finalmente, el polinomio $\boldsymbol{T}$ debe ser de orden 3 y se va a definir en términos de las especificaciones temporales a lazo cerrado de la salida controlada $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$. Es por eso que el polinomio a lazo cerrado deseado $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s})$ se construye empleando un criterio de garantía de polos dominantes (Persson y col. 1992). Las especificaciones de desempeño en el tiempo de la salida controlada se convierten en un par de polos conjugados $\boldsymbol{s_{1,2}} = -\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{j\beta}$. Su dominancia requiere que el cociente entre la parte real de los otros polos y $-\boldsymbol{\alpha}$ exceda un término $\boldsymbol{\lambda}$. De esta manera, todos los otros polos se encuentran a la izquierda de la línea vertical $\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{\lambda\alpha}$. En nuestro caso, el polinomio $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{s})$ se puede escribir como

$$T(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2)(s + \lambda\zeta\omega_n) \tag{8}$$

El coeficiente de amortiguación ζ y la frecuencia natural ω_n de los polos dominantes se computan en términos del sobrepico $\left(M_p\right)$ y del tiempo de establecimiento (t_s) deseados a través de las ecuaciones (Dorf y Bishop, 2017).

$$\begin{gathered} M_p = e^{\left(-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)} \Longrightarrow \\ \zeta = 1\bigg/\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{ln(M_p)}\right)^2} \\ t_s = 4/(\zeta\omega_n) \Longrightarrow \omega_n = 4/\zeta t_s \end{gathered} \tag{9}$$

Reemplazando (9) en (8) e igualando los coeficientes en (7), luego de incluir los polinomios numerador y denominador definidos en (4) y (6) resultan las ecuaciones

$$\begin{gathered} a_0 + l_0 = t_2 \\ a_0 l_0 + b_0 m_1 = t_1 \\ b_0 m_0 = t_0 \end{gathered} \tag{10}$$

Para tener una formulación de un problema de optimización lineal, en lugar de asignar los polos a lazo cerrado en las posiciones específicas dadas en (8), se van a localizar en una región politópica del plano complejo. Para eso se considera que el polinomio $T(s)$ es un polinomio tipo intervalo (Teppa-Garran y Faggioni, 2023) descrito como

$$T(s) = s^3 + t_2 s^2 + t_1 s + t_0 \tag{11}$$

con

$$t_i \in [t_i^-, t_i^+] \; \forall \, i \tag{12}$$

Esto significa que si se identifica el lado izquierdo de (7) (polinomio característico a lazo cerrado) como $\rho(s)$, el lugar de las raíces de $\rho(s)$ cuando a_0 y b_0 varían dentro de (5) va a estar contenido por el lugar de las raíces de (11) cuando sus coeficientes varían en el interior de (12). Esto es,

$$\mathcal{X}\{\rho(s)\} \subset \mathcal{X}\{T(s)\} \tag{13}$$

con $\mathcal{X}\{\cdot\}$ denotando el lugar de las raíces.

Esto nos permite reescribir el sistema de ecuaciones (10) en la forma

$$\begin{gathered} t_2^- \le a_0 + l_0 \le t_2^+ \\ t_1^- \le a_0 l_0 + b_0 m_1 \le t_1^+ \\ t_0^- \le b_0 m_0 \le t_0^+ \end{gathered} \tag{14}$$

Con b_0 y a_0 variando en el interior de los intervalos (5).

El teorema del borde (Barlett y col. 1988) establece que todas las desigualdades en (14) se satisfacen si y solo si los extremos de los parámetros las verifican.

Por consiguiente, reemplazando las diferentes combinaciones de los vértices en el sistema de desigualdades (14) resulta

$$\begin{gathered} t_2^- \le a_0^- + l_0 \le t_2^+ \\ t_2^- \le a_0^+ + l_0 \le t_2^+ \\ t_1^- \le a_0^- l_0 + b_0^- m_1 \le t_1^+ \\ t_1^- \le a_0^- l_0 + b_0^+ m_1 \le t_1^+ \\ t_1^- \le a_0^+ l_0 + b_0^- m_1 \le t_1^+ \\ t_1^- \le a_0^+ l_0 + b_0^+ m_1 \le t_1^+ \\ t_0^- \le b_0^- m_0 \le t_0^+ \\ t_0^- \le b_0^+ m_0 \le t_0^+ \end{gathered} \tag{15}$$

Y de esta forma puede formularse el siguiente problema de optimización lineal para computar el controlador (6).

$Minimizar\ z = m_1 + m_0 + l_0$

$Sujeto\ a$

$$\begin{gathered} l_0 \le t_2^+ - a_0^- \\ l_0 \le t_2^+ - a_0^+ \\ a_0^- l_0 + b_0^- m_1 \le t_1^+ \\ a_0^- l_0 + b_0^+ m_1 \le t_1^+ \\ a_0^+ l_0 + b_0^- m_1 \le t_1^+ \\ a_0^+ l_0 + b_0^+ m_1 \le t_1^+ \\ b_0^- m_0 \le t_0^+ \\ b_0^+ m_0 \le t_0^+ \\ l_0 \ge t_2^- - a_0^- \\ l_0 \ge t_2^- - a_0^+ \\ a_0^- l_0 + b_0^- m_1 \ge t_1^- \\ a_0^- l_0 + b_0^+ m_1 \ge t_1^- \\ a_0^+ l_0 + b_0^- m_1 \ge t_1^- \\ a_0^+ l_0 + b_0^+ m_1 \ge t_1^- \\ b_0^- m_0 \ge t_0^- \\ b_0^+ m_0 \ge t_0^- \end{gathered} \tag{16}$$

Comentario 2: La selección de la función objetivo en (16) es con el propósito de tener una función lineal en las variables de optimización del problema tal cual se recomienda en (Oliveira y col, 2014).

4 Resultados

Empleando $M_p = 0.01$, $t_s = 60$ s en (8) y fijando el polo rápido en -0.6 resulta el polinomio a lazo cerrado deseado

$$T(s) = s^3 + t_2 s^2 + t_1 s + t_0 = s^3 + 0.7334s^2 + 0.0866s + 0.0039 \quad (17)$$

Se consideran los intervalos de variación

$$t_2 \in [0.5334, 0.9334]$$
$$t_1 \in [0.0666, 0.1066] \quad (18)$$
$$t_0 \in [0.0019, 0.0059]$$

En la Fig. 3 se ilustra el lugar de las raíces del polinomio (17) cuando sus coeficientes varían en el interior de los intervalos (18) ($\mathcal{X}\{T(s)\}$).

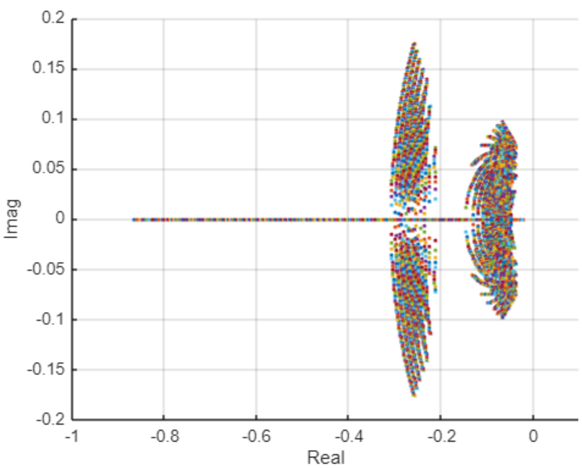

Fig. 3. Lugar de raíces del polinomio a lazo cerrado deseado. (Root locus of the desired close-loop polynomial)

Reemplazando (4), (5), (17) y (18) en el problema de optimización lineal (16) y luego de resolverlo empleando el *Solver* de *Excel* permite obtener el controlador

$$C(s) = \frac{0.24s + 0.01}{s(s + 0.53)} \quad (19)$$

La Fig. 4 muestra el desempeño del controlador (19) utilizando cualquiera de los modelos de la planta (1-3) que incluyen el efecto del retardo de transporte y la aplicación de un perfil de temperatura con cambios escalonados en la señal de referencia. Puede apreciarse un seguimiento muy satisfactorio independientemente del modelo que se utilice.

Adicionalmente, la Fig. 5 ilustra el rechazo a una perturbación de entrada constante aplicada a los 175 s luego de que la temperatura en el sensor 3 ha alcanzado un valor de 35 º C.

Finalmente, si se reemplaza el controlador calculado (19) en el lado izquierdo de la ecuación Diofantina (7) resulta el polinomio característico

$$\rho(s) = s^3 + (a_0 + 0.53)s^2 + (0.53a_0 + 0.24b_0)s + 0.01b_0 \quad (20)$$

con a_0 y b_0 variando en el interior de (5). El lugar de las raíces de (19) ($\mathcal{X}\{\rho(s)\}$) se muestra en la Fig. 6, puede apreciarse que efectivamente está contenido dentro del lugar de las raíces de la Fig. 3.

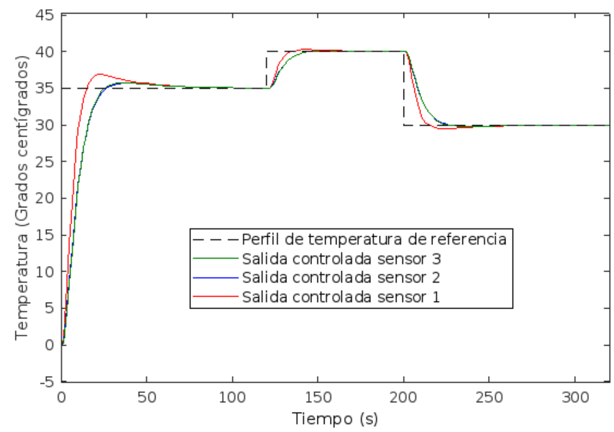

Fig. 4. Seguimiento de un perfil de temperatura escalonado considerando el control de la temperatura en los tres sensores del EFC. (Tracking of the step-temperature-profile for temperature control at the three sensors of the EFC)

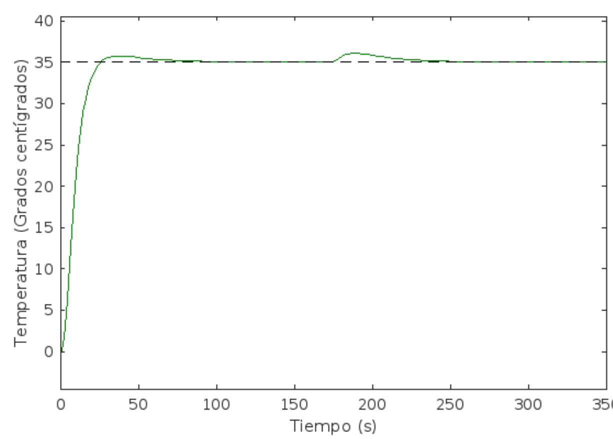

Fig. 5. Rechazo de una perturbación de entrada tipo escalón aplicada a los 175 s después que el sensor 3 ha alcanzado una temperatura de 35 ºC. (Rejection of a step input disturbance applied 175 s after sensor 3 has reached a temperature of 35 °C)

Conclusiones

Este trabajo parte de la conocida ecuación Diofantina clásica para resolver el problema de asignación de polos a lazo cerrado en posiciones específicas del plano complejo. Si esta asignación de polos, se extiende a una región compacta del plano complejo, definida mediante las variaciones de los coeficientes de un polinomio deseado a lazo cerrado tipo intervalo, entonces la ecuación Diofantina se transforma en un sistema de desigualdades, que sirve de marco para incorporar la incertidumbre tipo intervalo de la planta y posteriormente mediante la resolución de un problema de optimización lineal, determinar un controlador robusto que garantiza el seguimiento de señales de referencia constantes cumpliendo con unos requerimientos deseados de sobrepico y tiempo de establecimiento en la salida controlada. Esta metodología es aplicada de manera satisfactoria a un proceso de flujo de calor en el seguimiento de perfiles de temperatura que varían en forma escalonada.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo brindado por el Programa de Investigación de la Universidad Metropolitana en Caracas, Venezuela a través del proyecto número PI-A-20-21-22.

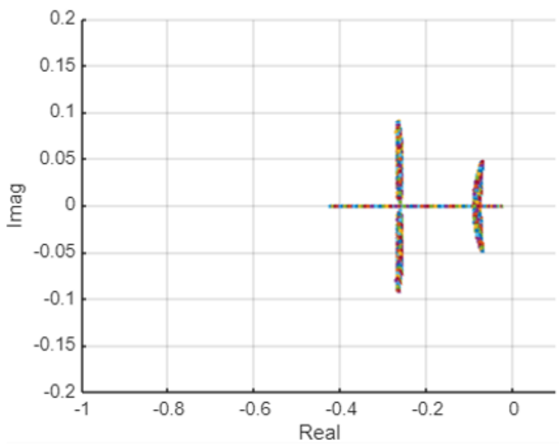

Fig. 6. Lugar de raíces del polinomio característico a lazo cerrado considerando el controlador (19) y variaciones en el modelo de la planta. (Root locus of the characteristic closed-loop polynomial considering the controller (19) and variations in the plant model)

Referencias

Ahn, H. S., Bhambhani, V., y Chen, Y. (2009). Fractional-order integral and derivative controller for temperature profile tracking. Sadhana, *34*, 833-850. https://doi.org/10.1007/s12046-009-0049-2

Al-Saggaf, U., Mehedi, I., Bettayeb, M., y Mansouri, R. (2016). Fractional-order controller design for a heat flow process. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 230(7), 680-691. https://doi.org/10.1177/0959651816649917

Al-Saggaf, U. M., Mehedi, I. M., Mansouri, R., y Bettayeb, M. (2021). Fractional Order Linear ADRC-Based Controller Design for Heat-Flow Experiment. Mathematical problems in Engineering. https://doi.org/10.1155/2021/7291420

Åström, K. J., y Wittenmark, B. (2013). *Computer-controlled systems: theory and design*. Courier Corporation.

Bartlett, A. C., Hollot, C. V., Lin, H., (1988). Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. Mathematics of Control, Signals and Systems, 1(11), pp. 61-71. https://doi.org/10.1007/BF02551236

Chen, C.T., (1987). Introduction to the linear algebraic method for control system design. IEEE Control Systems Magazine, 7(5), pp. 36-42. doi: 10.1109/MCS.1987.1105378

Chen, C., (1999). *Linear System: Theory and Design*. Oxford University Press.

Dorf, R., Bishop, R., (2017). *Modern control systems*. Pearson Prentice Hall.

Francis, B. A., Wonham, W. M. (1976). The internal model principle of control theory. Automatica, 12(5), pp. 457-465. https://doi.org/10.1016/0005-1098(76)90006-6

Hedberg, E., Löfberg, J., y Helmersson, A. (2020). A pedagogical path from the internal model principle to Youla-Kučera parametrization. IFAC-PapersOnLine, 53(2), pp. 17374-17379. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2090

Jain, M., Rani, A., Pachauri, N., Singh, V., y Mittal, A. P. (2019). Design of fractional order 2-DOF PI controller for real-time control of heat flow experiment. Engineering Science and Technology, an International Journal, 22(1), pp. 215-228. https://doi.org/10.1016/j.jestch.2018.07.002

Jamil, A. A., Tu, W. F., Ali, S. W., Terriche, Y., y Guerrero, J. M. (2022). Fractional-order PID controllers for temperature control: A review. Energies, 15(10), p. 3800 https://doi.org/10.3390/en15103800

Kaan, C., Sekban, H., Orman, K., y Başçi, A. (2020). Design, Simulation and Comparison of Controllers for Temperature Profile Tracking Control of a Heat Flow System. Erzincan University Journal of Science and Technology, 13(2), pp. 828-838. http://dx.doi.org/10.18185/erzifbed.766645

Oliveira, E. J., Honorio, L. M., Anzai, A. H., y Soares, T. X. (2014). Linear programming for optimum PID controller tuning. Applied Mathematics, 5, pp.886-897. http://dx.doi.org/10.4236/am.2014.56084

Orman, K. (2019). Temperature profile tracking control with memristor based PI controller in the heat flow system. International Journal of Modern Research in Engineering and Technology, 4(12), pp. 12-15.

Orman, K. (2022). Design of a memristor-based 2-DOF PI controller and testing of its temperature profile tracking in a heat flow system. IEEE Access, 10, pp. 98384-98390. http://dx.doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3206022

Persson, P. y Åström, K. (1992). Dominant pole design a unified view of PID controller tuning, IFAC Proceedings Volumes, 25(14), pp. 377-382.

Pradhan, R., Pati, B. B. (2019). Comparative performance evaluation of fractional order PID controller for heat flow system using evolutionary algorithms. International Journal of Applied Metaheuristic Computing (IJAMC), 10(4), pp. 68-90. http://dx.doi.org/10.4018/IJAMC.2019100105

Quanser innovative edutech, (2012). *Heat flow laboratory*. Quanser Inc., Ontario.

Teppa-Garran, P. y Faggioni, M. (2023). Closed-loop poles assignment using linear programming. Ciencia e Ingeniería, 44(2), pp. 89-94.

Recibido: *02/02/2024*

Aceptado: *03/07/2024*

Pedro Teppa-Garrán*; Ingeniero Electricista UNIMET, MSc Ingeniería Electrónica, USB. MSc Matemáticas, USB. PhD Sistemas de Control, Université Paul Sabatier, Francia. Postdoctorado en Sistemas de Control, LAAS – CNRS, Francia. Profesor Titular UNIMET.*
https://orcid.org/ 0000-0001-6384-3185

Isabella Leizaola*: Licenciada en Matemáticas Industriales UNIMET.*
isabella.leizaola@correo.unimet.edu.ve
https://orcid.org/0009-0000-1861-9176