

Control robusto por realimentación estática de la salida extendida para sistemas lineales a tiempo discreto

Robust control by extended static output feedback for discrete-time linear systems

Ríos-Bolívar, Adisson

Dpto. de Sistemas de Control. Facultad de Ingeniería. ULA

Mérida 5101, Venezuela

ilich@ula.ve

Resumen

En esta contribución se presenta un método para la síntesis de controladores robustos en sistemas lineales a tiempo discreto con incertidumbres politópicas. El método considera una ley de control por realimentación estática de la salida extendida (ESOF), basada en condiciones de desempeño modificadas, establecidas a partir de las normas H_2/H_∞ , las cuales se describen como desigualdades matriciales lineales, LMIs. La ESOF consiste en el diseño de ganancias de realimentación para la inyección de la salida y su derivada discreta, que corresponde a la señal de control. Se establecen condiciones para la existencia de este tipo de control. Los parámetros inciertos se suponen que pertenecen a un politopo. Se consideran índices de desempeño multi-objetivos en H_2/H_∞ . Las condiciones de desempeño H_2/H_∞ extendidas se obtienen por medio del lema de proyección. El desempeño de la técnica propuesta es ilustrado por medio de un ejemplo numérico.

Palabras clave: Sistemas Lineales a tiempo Discreto. Realimentación estática. Control Robusto. Incertidumbre Politópica. Desigualdades Matriciales Lineales.

Abstract

In this contribution it is presented a method for the synthesis of robust controls in discrete-time linear systems (DTLS) with polytopic uncertainties. The method considers a static feedback of the extended output control law, based on modified performance conditions, established under the H_2/H_∞ rules, which are described as linear matrix inequalities (LMI). The DTLS consists in the design of feedback profits by the output's injection and its discrete derivative, which corresponds to the control signal. Conditions are established for this kind of control's existence. The uncertain parameters are supposed to belong to a polytope. Multi-objective performance rates are considered in H_2/H_∞ . The H_2/H_∞ extended performance conditions are obtained by the projection lemma. The performance of the proposed technique is illustrated by a numerical example.

Key words: Discrete-time Linear Systems. Static Output Feedback. Robust Control. Polytopical Uncertainty. Linear Matrix Inequalities (LMI).

1 Introducción

En todo proceso de síntesis de sistemas de control el objetivo final es la implantación práctica del controlador diseñado. Cuando se trata la síntesis de sistemas de control para los fines prácticos, siempre se busca la mayor simplificación y flexibilidad para la implementación. De allí que el control por realimentación de la salida ha sido un tópico de mucho interés de investigación.

Como se sabe, uno de los controladores que ofrecen

esas características son los construidos a partir de la realimentación de estados, los cuales tienen el inconveniente de que no siempre es posible disponer de todos los estados. Por su parte, la realimentación estática de la salida permite tener todas las bondades para una implementación sin muchas exigencias. El mayor inconveniente para la síntesis de control por realimentación estática de la salida (SOF) son sus condiciones de existencia de tales controladores, (Syrmos *et al.*, 1997).

El problema de SOF se refiere a lo siguiente: dado un

sistema lineal, en general invariante en el tiempo, encontrar una ganancia de realimentación estática de la salida de manera que en lazo cerrado el sistema controlado exhiba características deseadas de comportamiento; o en su defecto, determinar la no existencia de tal ganancia, (Gadewadikar *et al.*, 2006). Aunque se conocen varias condiciones teóricas para la existencia de controladores por SOF, existe el inconveniente de algoritmos prácticos para la solución sin mayores requerimientos.

1.1 Formulación del problema

Considérese el sistema DTLS definido por

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k; \quad y_k = Cx_k \quad (1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Para SOF, si el sistema **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** tiene la propiedad de que (A, B) es estabilizable, se debe encontrar un control de la forma.

$$u_k = \mathcal{K}y_k \quad (2)$$

donde $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ es la ganancia de realimentación estática a construir, de tal manera que el sistema en lazo cerrado sea estable. Esto significa que si existe \mathcal{K} , entonces la matriz dinámica del lazo cerrado $A + B\mathcal{K}C$ debe ser estable.

Problema 1: Dado el sistema (1), con (A, B) estabilizable. Encontrar \mathcal{K} para el control (2) de tal manera que la matriz $A + B\mathcal{K}C$ tenga todos sus autovalores en la región estable.

La selección de la ganancia \mathcal{K} debe permitir satisfacer los requerimientos de funcionamiento según los objetivos de diseño del sistema de control. El primer detalle a definir es la existencia de tal ganancia de realimentación estática. Para ello han sido presentado varios resultados tanto para el caso de sistemas a tiempo continuo como para tiempo discreto: (Syrmos *et al.*, 1997; Gadewadikar *et al.*, 2006; Eremenko and Gabrielov, 2002; Chen *et al.*, 2004; Lee *et al.*, 2006; Bara and Boutayeb, 2005). Las condiciones establecidas no indican, de manera directa, los algoritmos de solución. Así, se han presentado varios métodos para la solución algorítmica del problema de SOF: (Bernstein, 1987; Yang *et al.*, 2004; Ghaoui *et al.*, 1997; Henrion *et al.*, 2005).

Por otro lado, y en el caso particular de los DTLS, también se ha abordado el problema de SOF en sistemas con incertidumbres: (ZHANG *et al.*, 2005; Kanev *et al.*, 2004; Rosinová and Veselý, 2004), en el cual se destaca que la SOF es un problema de optimización NP-Hard no convexo, mismo que se puede representar, para muchos objetivos de diseño, como un problema de optimización de desigualdad matricial bilineal (BMI). En este caso, las soluciones reportadas siguen manteniendo el problema de requerimientos exigentes desde el punto de vista computacio-

nal, limitando la aplicación práctica de las técnicas de SOF en procesos industriales.

Para mantener la idea del problema de SOF, consideremos un ejemplo numérico a partir del siguiente modelo dinámico:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k; \quad y_k = (1 \ 0) x_k \quad (3)$$

De acuerdo al Problema 1, dadas las condiciones estructurales del modelo, se debe encontrar \mathcal{K} para estabilizar el sistema en lazo cerrado. Para este caso particular, no es posible estabilizar dicho sistema por SOF.

Notación \mathbb{R} es el conjunto de números reales. Para una matriz A , A^T denota su transpuesta. $tr(A)$ define la traza de la matriz A . ℓ_2 es el espacio de Hilbert de señales a tiempo discreto vectoriales definidas en $(-\infty, \infty)$, tal que $\|x\|_2 \triangleq (\sum_n |x_n|^2)^{1/2} < \infty, \forall x \in \ell_2$. $diag(A, B)$ es una matriz diagonal con entradas A y B en su diagonal. En las particiones de matrices simétricas $*$ denota cada uno de sus bloques simétricos. \mathbb{I} define la matriz identidad de dimensión apropiada.1.1.

2 Preliminares

En esta sección se establecen algunos resultados preliminares a los fines de dar condiciones de desempeño adicionales en el análisis de los sistemas lineales a tiempo discreto (DTLS). Considérese el sistema DTLS

$$G(z) := \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k, \end{cases} \quad (4)$$

donde, $x_k \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $u_k \in \mathbb{R}^m$ son los controles y $y_k \in \mathbb{R}^p$ son las variables medidas. Las matrices A, B, C, D son bien conocidas y de dimensiones apropiadas. Se sabe que $G(z)$ es estable si los autovalores de A pertenecen a la región estable del plano complejo, estos es:

$$\Lambda(\phi) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}^* \phi \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} < 0 \right\}, \quad (5)$$

donde

$$\phi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

En términos de Lyapunov, esa condición de estabilidad se describe por el siguiente Lema:

Lema 2.1 (LMI Estándar): considérese el sistema (4). Entonces, todos los autovalores de A pertenecen a $\Lambda(\phi)$ dado por (5) si y solamente si existe una matriz $P \in \mathbb{S}_n$ que satisface el siguiente conjunto de LMIs:

$$P > 0 \quad (7) \quad \text{I) } A \text{ es estable y } \|C(z\mathbb{I} - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ A \end{bmatrix}^T (\phi \otimes P) \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ A \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

Demostración: Ver (Pipeleers et al., 2009).

Para estudiar el desempeño de ese sistema, en la teoría de control óptimo robusto, es tradicional aplicar criterios basados en normas. Así, existen de versiones mejoradas del *Lema Real Acotado* de manera de minimizar el conservatismo (Oliveira et al., 2002; Xu et al., 2007; He et al., 2005), o en el caso de desempeño en H_2 (Oliveira et al., 2002; Pipeleers et al., 2009), esto con la finalidad de reducir el conservatismo. Seguidamente, algunos de estos métodos serán presentados y sirven de base para el desarrollo de los resultados que mostraremos en esta contribución.

2.1 Condiciones LMI extendidas para DTLS

Lema 2.2 (Norma H_2 relajada en tiempo discreto): considérese un sistema como el dado por (4). Las siguientes declaraciones, con $P = P^T > 0$, son equivalentes

$$I. \quad A \text{ es estable y } \|C(z\mathbb{I} - A)^{-1}B\|_2^2 < \mu.$$

II. Existe P y Z , tal que

$$\begin{bmatrix} P & PA & PB \\ A^T P & P & 0 \\ B^T P & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} Z & C & D \\ C^T & P & 0 \\ D^T & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0, \quad \text{tr}(Z) < \mu. \quad (9)$$

III. Existe P, Z y G tal que

$$\begin{bmatrix} G + G^T - P & GA & GB \\ A^T G^T & P & 0 \\ B^T G^T & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} Z & C & D \\ C^T & P & 0 \\ D^T & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0, \quad \text{tr}(Z) < \mu. \quad (10)$$

Demostración: La demostración está basada en la aplicación del lema de proyección. Esta prueba puede ser evaluada en (Duan et al., 2006).

Lema 2.3 (Norma H_∞ relajada en tiempo discreto): considérese el sistema lineal a tiempo discreto (4), con matrices (A, B, C, D) . Las siguientes declaraciones, con $P = P^T > 0$, son equivalentes

II) Existe P , tal que

$$\begin{bmatrix} P & 0 & A^T P & C^T \\ 0 & \gamma^2 \mathbb{I} & B^T P & D^T \\ PA & PB & P & 0 \\ C & D & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0. \quad (11)$$

iii) Existe P y G tal que

$$\begin{bmatrix} G + G^T - P & 0 & GA & GB \\ 0 & \mathbb{I} & C & D \\ A^T G^T & C^T & P & 0 \\ B^T G^T & D^T & 0 & \gamma^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0. \quad (12)$$

Demostración: La demostración se construye a partir del lema de proyección. Los detalles pueden ser evaluados en (Duan et al., 2006).

Estos resultados serán útiles para el diseño de controladores robustos por realimentación estática de la salida extendida, tal como se mostrará a continuación

3 Control por Realimentación Estática de la Salida Extendida

Considérese el sistema (1). Se define el control como:

$$u_k = \mathcal{K}_0 y_k + \mathcal{K}_1 y_{k+1}, \quad (13)$$

donde \mathcal{K}_0 y \mathcal{K}_1 son las ganancias de realimentación, a determinar, para la salida y su derivada discreta. En este caso, la derivada discreta de la salida se utiliza en el contexto de la acción derivativa en controladores tipo PID. Así, el control estará dado por

$$u_k = (\mathbb{I} - \mathcal{K}_1 C B)^{-1} (\mathcal{K}_0 C + \mathcal{K}_1 C A) x_k, \quad (14)$$

Tal como se puede observar, la existencia del control depende de la invertibilidad de la matriz $\mathbb{I} - \mathcal{K}_1 C B$, que es una condición menos "fuerte" que las establecidas en el problema 1 de SOF. Así, para el Control por realimentación estática de la salida extendida se establece el siguiente problema:

Problema 2: Dado el sistema (1), con (A, B) estabilizable. Encontrar \mathcal{K}_0 y \mathcal{K}_1 para el control (14) de tal manera que la matriz $A + B(\mathbb{I} - \mathcal{K}_1 C B)^{-1}(\mathcal{K}_0 C + \mathcal{K}_1 C A)$ tenga todos sus autovalores en el semi-plano estable.

Lema 3.1 Sea $\mathbb{M} = \mathbb{I} - \mathcal{K}_1 C B$. Existe un control por realimentación estática de la salida extendida de la forma

$$u_k = \mathbb{M}^\ddagger (\mathcal{K}_0 C + \mathcal{K}_1 C A) x_k, \quad (15)$$

si y solo si \mathbb{M} tiene inversa generalizada (pseudo inversa

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c &= A + B_u \mathbb{M}^\dagger (\mathcal{K}_0 C_y + \mathcal{K}_1 C_y A) \\ \mathcal{B}_c &= B_\omega + B_u \mathbb{M}^\dagger \mathcal{K}_1 C_y B_\omega, \\ \mathcal{C}_c &= C_z, \\ \mathcal{D}_c &= D_\omega. \end{aligned}$$

Así, $H_{z\omega}(z)$ corresponde a

$$H_{z\omega}(z) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}_c & \mathcal{B}_c \\ \hline \mathcal{C}_c & \mathcal{D}_c \end{array} \right] = \mathcal{C}_c (z\mathbb{I} - \mathcal{A}_c)^{-1} \mathcal{B}_c + \mathcal{D}_c \quad (22)$$

5.1 Control H_2

En este caso, la idea es obtener un controlador que nos permite alcanzar un índice de desempeño bajo la norma- H_2

Problema 3a Para el sistema (20), con (A, B_u) estabilizable. Se desea encontrar \mathcal{K}_0 y \mathcal{K}_1 para el control (14), de tal manera que la matriz dinámica del lazo cerrado \mathcal{A}_c sea estable y que la norma- H_2 de la función de transferencia $\|H_{z\omega}(z)\|_2$ sea mínima, es decir $\|H_{z\omega}(z)\|_2 < \gamma$

Del Lema 2.2 se obtienen los siguientes resultados:

5.1.1 Control H_2 Conservativo

Teorema 5.1 Considérese el sistema dado por (20), con el par (A, B_u) controlable. Existe un control por SOF extendida, de la forma (15), para la estabilización en lazo cerrado y satisfaciendo el índice desempeño $\|H_{z\omega}(z)\|_2 < \gamma$, si existen \mathbb{M}^\dagger , la matriz simétrica $P \succ 0$, y las matrices X, Y, Z, \mathbb{Z} , tal que las siguientes LMIs son satisfechas

$$\left[\begin{array}{cc|cc} P & & \star & \star \\ PA^T + Y^T B_u^T + Z^T B_u^T & P & \star & \star \\ B_\omega^T + B_u^T C_y^T X^T B_u^T & 0 & \mathbb{I} & \end{array} \right] > 0 \quad (23)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbb{Z} & C_z P & D_\omega & \\ P^T C_z^T & P & 0 & \\ D_\omega^T & 0 & \mathbb{I} & \end{array} \right] > 0, \quad \text{tr}(\mathbb{Z}) < \gamma; \quad (24)$$

a partir de lo cual, las ganancias de realimentación son

$$\mathcal{K}_0 = \mathbb{V}^\dagger Y P^{-1} C_y^T (C_y C_y^T)^{-1} \quad (25)$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathbb{V}^\dagger Z P^{-1} A^T C_y^T (C_y A A^T C_y^T)^{-1} \quad (26)$$

donde $\mathbb{V} = \mathbb{I} + X C_y B_u$.

Demostración: La demostración está basada en la aplicación de transformaciones congruentes y cambios de

variables, ver (Ríos-Bolívar et al., 2009a). En efecto, la primera desigualdad de la ecuación (9) se multiplica por la izquierda por la transformación \mathbb{T} y por la derecha por \mathbb{T}^T . Mientras que para la segunda desigualdad se utiliza la transformación \mathbb{S} , bajo la misma multiplicación, donde $\mathbb{T} = \text{diag}(Q, Q, \mathbb{I})$ y $\mathbb{S} = \text{diag}(\mathbb{I}, Q, \mathbb{I})$, con $Q = P^{-1}$. Los cambios de variables se relacionan con la linealización de las desigualdades resultantes.

Como se puede notar, las condiciones para obtener el controlador son similares a las derivadas de la solución del problema 2 vía LMI, pero se amplía el conjunto de sistemas que pueden ser controlados por SOF.

5.1.2 Control H_2 Relajado

Teorema 5.2 Considérese el sistema dado por (20), con el par (A, B_u) controlable. Existe un control por SOF extendida, de la forma (15), para la estabilización en lazo cerrado y satisfaciendo el índice desempeño $\|H_{z\omega}(z)\|_2 < \gamma$, si existen \mathbb{M}^\dagger , la matriz simétrica $P \succ 0$, y las matrices G, X, Y, Z, \mathbb{Z} , tal que las siguientes LMIs son satisfechas

$$\left[\begin{array}{cc|cc} G + G^T - P & \star & \star & \\ AG^T + B_u Y + B_u Z & P & \star & \\ C_z G^T & 0 & \mathbb{I} & \end{array} \right] > 0 \quad (27)$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbb{Z} & \star & \star & \\ B_\omega + B_u X C_y B_\omega & P & \star & \\ D_\omega & 0 & \mathbb{I} & \end{array} \right] > 0, \quad \text{tr}(\mathbb{Z}) < \gamma. \quad (28)$$

para lo cual, las ganancias de realimentación se obtienen de

$$\mathcal{K}_0 = \mathbb{V}^\dagger Y (G^T)^{-1} C_y^T (C_y C_y^T)^{-1} \quad (29)$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathbb{V}^\dagger Z (G^T)^{-1} A^T C_y^T (C_y A A^T C_y^T)^{-1} \quad (30)$$

donde $\mathbb{V} = \mathbb{I} + X C_y B_u$.

Demostración: La prueba es análoga al caso previo, ver (Ríos-Bolívar et al., 2009a).

5.2 Control H_∞

Del Lema 2.3, donde la norma- ∞ se caracteriza como una LMI, se obtienen los siguientes resultados:

5.2.1 Control H_∞ Conservativo

Teorema 5.3 Sea el sistema dado por (20) con el par (A, B_u) estabilizable. Existe un control por SOF entendida de la forma (15), que estabiliza en sistema en lazo cerrado y

$\|H_{z\omega}(z)\|_\infty < \mu$, si existe \mathbb{M}^\dagger y la matriz $P \succ 0$ simétrica, y las matrices X, Y, Z , tal que la siguiente LMI es satisfecha

$$\begin{bmatrix} P & * & * & * \\ 0 & \mu^2 \mathbb{I} & * & * \\ AP + B_u Y + B_u Z & B_\omega + B_u X C_y B_\omega & X & * \\ C_z P & D_\omega & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (31)$$

así, las ganancias de realimentación se obtienen de

$$\mathcal{K}_0 = \mathbb{V}^\dagger Y P^{-1} C_y^T (C_y C_y^T)^{-1} \quad (32)$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathbb{V}^\dagger Z P^{-1} A^T C_y^T (C_y A A^T C_y^T)^{-1} \quad (33)$$

donde $\mathbb{V} = \mathbb{I} + X C_y B_u$.

Demostración: Nuevamente, mediante transformación congruente y cambios de variables se obtiene la prueba, ver (Ríos-Bolívar et al., 2009b; Ríos-Bolívar et al., 2009a).

5.2.2 Control H_∞ Relajado

Teorema 5.4 Considérese el sistema dado por (20), con el par (A, B_u) controlable. Existe un control por SOF extendida, de la forma (15), para la estabilización en lazo cerrado y satisfaciendo el índice desempeño $\|H_{z\omega}(z)\|_\infty < \mu$, si existen \mathbb{M}^\dagger , la matriz simétrica $P \succ 0$, y las matrices G, Y, Z , tal que la siguiente LMI es satisfecha

$$\begin{bmatrix} G + G^T - P & * & * & * \\ 0 & \mathbb{I} & * & * \\ AG^T + B_u Y + B_u Z & B_\omega + B_u X C_y B_\omega & P & * \\ C_z G^T & D_\omega & 0 & \mu^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (34)$$

para lo cual, las ganancias de la realimentación estática de la salida extendida se obtienen de

$$\mathcal{K}_0 = \mathbb{V}^\dagger Y (G^T)^{-1} C_y^T (C_y C_y^T)^{-1} \quad (35)$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathbb{V}^\dagger Z (G^T)^{-1} A^T C_y^T (C_y A A^T C_y^T)^{-1} \quad (36)$$

donde $\mathbb{V} = \mathbb{I} + X C_y B_u$.

Demostración: La demostración es análoga al caso previo.

En este caso las condiciones son similares a las presentadas en la solución del Problema 2 vía LMI. Por otro lado, se amplía el espectro de los sistemas a ser estabilizados por realimentación de la salida.

Por otro lado, se puede observar que hay condiciones para lograr un rechazo pleno de la perturbación. En efecto, si \mathcal{K}_1 se selecciona de tal manera que

$(\mathbb{I} + B_u \mathbb{M}^\dagger \mathcal{K}_1 C_y) \in \ker(B_\omega)$, entonces se rechaza la perturbación. Por lo tanto, una vez seleccionado \mathcal{K}_1 , se debe diseñar \mathcal{K}_0 de tal manera que la matriz dinámica de lazo cerrado sea estable (Ríos-Bolívar et al., 2009b). De igual manera, es posible tratar problema de regulación o seguimiento de la salida, nuevamente con una adecuada selección de $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ y una ganancia sobre la señal de referencia para asegurar un error nulo entre la salida y esa señal a seguir.

6 Control Robusto

Hasta ahora se ha considerado el diseño de controladores con objetivos de minimizar el efecto de las perturbaciones a las salidas controladas, tal como ha sido mostrado en (Ríos-Bolívar et al., 2009a). A partir de este momento, el interés se centra en diseñar controladores robustos, en procesos donde existe incertidumbre en la matriz dinámica de la planta. Sea el sistema incierto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha)x_k + B_\omega(\alpha)w_k + B_u u_k \\ z_k &= C_z(\alpha)x_k + D_\omega(\alpha)\omega_k \\ y_k &= C_y x_k, \end{aligned} \quad (37)$$

donde $x_k \in \mathfrak{R}^n$ son los estados, $\omega_k \in \mathfrak{R}^q$ son perturbaciones desconocidas, $u_k \in \mathfrak{R}^m$ son las entradas de control, $z_k \in \mathfrak{R}^{p_z}$ son las salidas controladas, $y_k \in \mathfrak{R}^{p_y}$ son las salidas medidas. Adicionalmente, las matrices desconocidas del sistema conforman un politopo incierto, es decir, pertenecen a una cáscara convexa, con lo cual

$$\begin{aligned} \Omega_N = (A, B_\omega, C_z, D_\omega)(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i, B_{\omega_i}, C_{z_i}, D_{\omega_i}), \\ \text{con } \alpha_i &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Puesto que α está restringida a un conjunto unitario ya que $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, entonces las matrices $(A, B_\omega, C_z, D_\omega)(\alpha)$ son funciones afines del vector de parámetros inciertos $\alpha \in \mathfrak{R}^N$ descrito por la combinación convexa de las matrices vértices $A_i, B_{\omega_i}, C_{z_i}, D_{\omega_i}$, $i = 1, 2, \dots, N$

Como se puede observar, las matrices B_u y C_y se consideran conocidas. Eso tiene correspondencia con el hecho de que ellas representan, desde el punto de vista práctico, los elementos fundamentales y precisos para la implantación de los sistemas de control, que son los actuadores y los sensores, respectivamente.

Ahora, aplicando el control por realimentación de la salida estática extendida, y asumiendo que $\mathbb{M} = \mathbb{I} - \mathcal{K}_1 C_y B_u$, entonces

$$\begin{aligned} u_k &= \mathbb{M}^\dagger (\mathcal{K}_0 C_y + \mathcal{K}_1 C_y A(\alpha)) x_k + \\ &\quad \mathbb{M}^\dagger \mathcal{K}_1 C_y B_\omega(\alpha) \omega_k, \end{aligned} \quad (39)$$

por lo que las matrices de lazo cerrado son

$$\begin{aligned} A_c &= A(\alpha) + B_u M^\dagger \mathcal{K}_0 C_y + B_u M^\dagger \mathcal{K}_1 C A(\alpha) \\ B_c &= B_\omega(\alpha) + B_u M^\dagger \mathcal{K}_1 C_y B_\omega(\alpha), \\ C_c &= C_z(\alpha), \\ D_c &= D_\omega(\alpha). \end{aligned}$$

6.1 Control Robusto H_2

Del Lema 2.2 se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 6.1 Sea el sistema (37) sobre el politopo (38). Existe una ley de control por realimentación estática de la salida extendida, de la forma (39), que garantiza un desempeño en H_2 para el sistema en lazo cerrado, cumpliendo las condiciones formales, si se satisfacen

$$\begin{bmatrix} G + G^T - P_i & \star & \star \\ A_i^T G^T + C_y^T Y^T + A_i^T C_y^T Z^T & P_i & \star \\ B_{\omega_i}^T G^T + B_{\omega_i}^T C_y^T Z^T & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & C_{z_i} & D_{\omega_i} \\ C_{z_i}^T & P_i & 0 \\ D_{\omega_i}^T & 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0, \quad \text{tr}(\mathbb{Z}) < \gamma. \quad (41)$$

para $i = 1, \dots, N$, donde $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times p_z}$, $P_i = P_i^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para lo cual las ganancias de la realimentación estática de la salida extendida se obtienen de

$$\mathcal{K}_0 = \mathbb{V}^\dagger B_u^\dagger G^{-1} Y \quad (42)$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathbb{V}^\dagger B_u^\dagger G^{-1} Z \quad (43)$$

donde $\mathbb{V} = M^\dagger = \mathbb{I} + B_u^\dagger G^{-1} Z C_y B_u$.

Demostración: A partir de cambios de variables se llega a la prueba. Asíumase que existe una solución factible para el problema de realimentación estática de la salida extendida, según el control (39). Entonces, según el Lema 2.2 y las matrices dinámicas del lazo cerrado, se tiene

$$\begin{bmatrix} G + G^T - P_i & G A_i + G B_u M^\dagger \mathcal{K}_0 C_y + G B_u M^\dagger \mathcal{K}_1 C_y A_i & \star \\ \star & P_i & \star \\ \star & \star & \star \\ G B_{\omega_i} + G B_u M^\dagger \mathcal{K}_1 C_y B_{\omega_i} & & \\ 0 & & \\ \mathbb{I} & & \end{bmatrix} > 0,$$

si $Y = G^T B_u M^\dagger \mathcal{K}_0$ y $Z = G^T B_u M^\dagger \mathcal{K}_1$, entonces por aplicación del Lema 2.2 se llega al resultado mostrado.

6.2 Control Robusto H_∞

Del Lema 2.3 se deriva el siguiente resultado:

Teorema 6.2 Sea el sistema (37) sobre el politopo (38). Existe una ley de control por realimentación estática de la salida extendida la forma (39), que garantiza un desempeño sub-óptimo H_∞ para el sistema en lazo cerrado, satisfaciendo las condiciones formales, si se satisface

$$\begin{bmatrix} G + G^T - P_i & \star & \star & \star \\ 0 & \mathbb{I} & \star & \star \\ A_i^T G^T + C_y^T Y^T + A_i^T C_y^T Z^T & C_{z_i}^T & P_i & \star \\ B_{\omega_i}^T G^T + B_{\omega_i}^T C_y^T Z^T & D_{\omega_i}^T & 0 & \mu^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (44)$$

para $i = 1, \dots, N$, donde $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times p_z}$, $P_i = P_i^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las ganancias de la realimentación son:

$$\mathcal{K}_0 = \mathbb{V}^\dagger B_u^\dagger G^{-1} Y \quad (45)$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathbb{V}^\dagger B_u^\dagger G^{-1} Z \quad (46)$$

donde $\mathbb{V} = M^\dagger = \mathbb{I} + B_u^\dagger G^{-1} Z C_y B_u$.

Demostración: A partir de cambios de variables se llega a la prueba. Asíumase que existe una solución factible para el problema de realimentación estática de la salida extendida, según el control (39). Entonces, según el Lema 2.3 y las matrices dinámicas del lazo cerrado, se tiene

$$\begin{bmatrix} G + G^T - P_i & 0 & \mathfrak{B} & G B_{\omega_i} + G B_u M^\dagger \mathcal{K}_1 C_y B_{\omega_i} \\ \star & \mathbb{I} & C_{z_i} & D_{\omega_i} \\ \star & \star & P_i & 0 \\ \star & \star & \star & \mu^2 \mathbb{I} \end{bmatrix} > 0,$$

donde $\mathfrak{B} = G A_i + G B_u M^\dagger \mathcal{K}_0 C_y + G^T B_u M^\dagger \mathcal{K}_1 C_y A_i$.

Si $Y = G^T B_u M^\dagger \mathcal{K}_0$ y $Z = G^T B_u M^\dagger \mathcal{K}_1$, entonces por aplicación del Lema 2.3 se llega a la conclusión mostrada

Los resultados aquí obtenidos en H_∞ y en H_2 se pueden combinar a fin de obtener controladores con multi-objetivos. En las técnicas multi-objetivos clásicas, las expresiones de la forma $A^T P + P A$ involucran productos entre las matrices de Lyapunov y las matrices de diseño, tal como ha sido mostrado en los casos no relajados, lo que se traduce en conservatismo. A fin de garantizar la convexidad del problema, es necesario hacer una consideración fundamental, reforzando todas las especificaciones a partir de una única función de Lyapunov. En el caso presentado, debido a las versiones extendidas de las caracterizaciones de las normas H_2, H_∞ como LMIs, no se generan productos que involucren matrices de Lyapunov, y las matrices de diseño $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ no dependerán de ellas, evitándose la necesidad de usar la misma matriz de Lyapunov para todas las especificacio-

nes. Así, este hecho es muy importante debido a que no solamente hay una matriz de Lyapunov dependiente de parámetros para cada formulación, sino que hay, además, una función de Lyapunov para cada especificación de desempeño, lo que permite reducir el conservatismo.

7. Evaluación Numérica

7.1 Ejemplo 1

Sea el sistema definido por, (Duan et al., 2006):

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 2.5 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega_k$$

$$z_k = \begin{bmatrix} -100 & 10 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \omega_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k;$$

el cual es inestable. Aplicando los resultados del Teorema 5.4 se obtiene:

$$\mathcal{K}_0 = -1.2610, \quad \mathcal{K}_1 = -0.1448$$

para un valor de $\mu = 2.1410$ de la minimización de la norma- ∞ para la función de transferencia $H_{z\omega}(z)$. Así, la matriz dinámica del lazo cerrado es

$$\mathcal{A}_c = \begin{bmatrix} -0.5061 & -0.4709 \\ 1.9939 & 1.0291 \end{bmatrix},$$

cuyos autovalores son $0.26150 \pm 0.5914j$. De esta manera se evidencia la estabilización del sistema en lazo cerrado con una atenuación de la perturbación

7.2 Ejemplo 2

Considérese el mismo sistema del ejemplo anterior pero con la matriz A incierta, esto es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 2.5 & 1 + \alpha \end{bmatrix}$$

con $|\alpha| \leq 0.45$. Por lo tanto, existen valores de α donde el sistema es inestable. Esta incertidumbre estructurada conforma un politopo de dos vértices. Aplicando los resultados del Teorema 6.2 se obtiene:

$$\mathcal{K}_0 = -0.8334, \quad \mathcal{K}_1 = 0.3333$$

para un valor de $\mu = 8.0007$. Para esas ganancias, la matriz de lazo cerrado es

$$\mathcal{A}_c = \begin{bmatrix} -1.2501 & -0.7500 \\ 1.2499 & 0.7500 + \alpha \end{bmatrix};$$

la cual, para el rango de valores de α , es estable, tal como se puede observar en la fig. 1

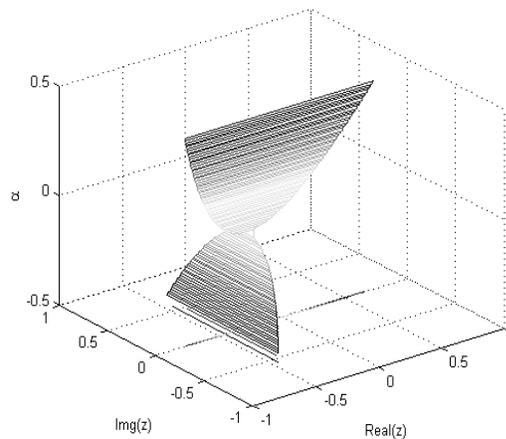


Fig. 1.

Para enfatizar, en los vértices del politopo y para el valor central, $\alpha = 0$, estas matrices son

$$\mathcal{A}_{c_1} = \begin{bmatrix} -1.2501 & -0.7500 \\ 1.2499 & 0.3000 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{c_0} = \begin{bmatrix} -1.2501 & -0.7500 \\ 1.2499 & 0.7500 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{c_2} = \begin{bmatrix} -1.2501 & -0.7500 \\ 1.2499 & 1.2000 \end{bmatrix};$$

las cuales, tal como se puede verificar, son todas estables.

Para la simulación, se ha considerado en primer lugar un valor de $\alpha = 0$, luego para $k = 150$ el nuevo valor es de $\alpha = -0.25$. Tal como se puede observar en la figura N° 2, el sistema es controlado, aún ante la variabilidad del parámetro, de acuerdo a lo establecido por la realimentación robusta de la salida extendida

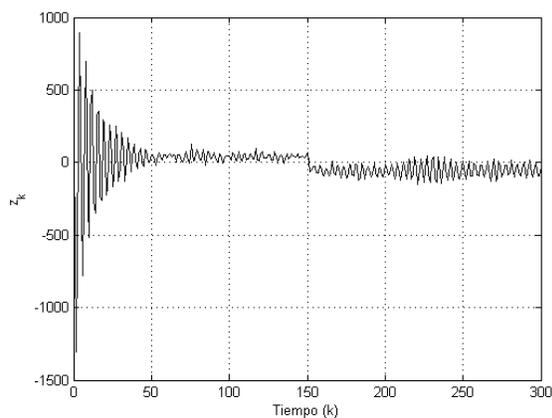


Fig. 2. La salida controlada

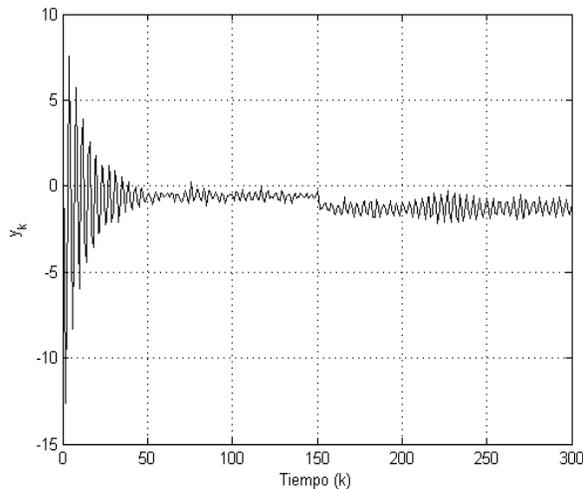


Fig. 3. La salida medida

En la Fig. 4 se muestra la señal de control.

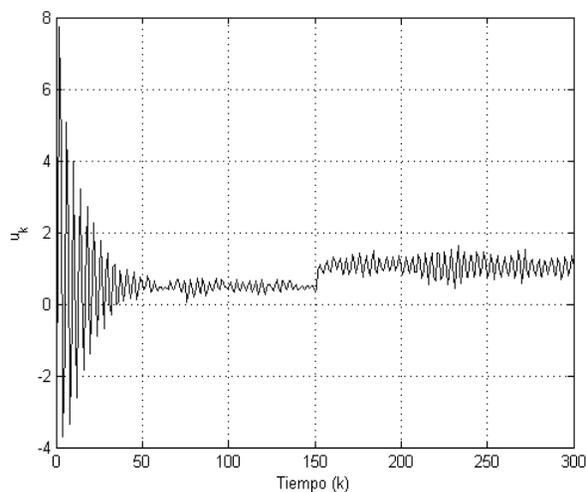


Fig. 4. La señal de control

8 Conclusiones

A partir de la salida y su derivada discreta, se ha planteado y resuelto el problema de control por realimentación estática de la salida en sistemas lineales a tiempo discreto con incertidumbres politópicas. Utilizando ambas señales, la salida y su derivada discreta, se diseñan dos ganancias de realimentación bajo las premisas de estabilidad robusta y manejo de perturbaciones. La solución permite ampliar el espacio de los sistemas que pueden ser estabilizados por las técnicas tradicionales de realimentación estática de la salida. La utilización de la derivada discreta de la salida se considera en el mismo contexto de la acción derivativa en controladores PID. Se han presentado las condiciones para la solución del problema, mismo que se ha resuelto para el

control en $H_2 - H_\infty$, utilizando la descripción de la norma-2 y de la norma- ∞ como desigualdades matriciales lineales (LMIs). Las condiciones son análogas a los problemas de realimentación estática de la salida ya conocidos, pero se amplía el espectro de los sistemas lineales inciertos a tiempo discreto que pueden ser controlados por este tipo de realimentación. El diseño del controlador por realimentación de la salida estática extendida es robusto ya que se han considerado sistemas lineales con incertidumbres politópicas. Las ganancias de realimentación de la salida extendida se obtienen por solución de LMIs relajadas, las cuales son menos conservativas, que se verifica mediante un ejemplo numérico.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el CDCHT de la Universidad de Los Andes, a través del proyecto No. I-1206-09-02-B, por lo que gratamente se reconocen estos soportes.

Referencias

- Bara, G. Iulia and Mohamed B, 2005, "Static output feedback stabilization with performance H_∞ for linear discrete-time systems". IEEE Trans. on Automatic Control 50(2), pp. 250-254.
- Bernstein D, 1987, "The optimal projection equations for static and dynamic output feedback: The singular case". IEEE Transactions on Automatic Control 32(12), pp. 1139-1143.
- Chen, Pang-Chia, Koan-Yuh Chang, Yaug-Fea Jeng and Wen-Jer Chang, 2004, "The study on the convex and LMI conditions for static output feedback stabilization". Journal of Marine Science and Technology 12(3), pp. 171-174.
- Duan, Z, J Zhang, C. Zhang and E. Mosca, 2006, "Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems". Automatica 42, pp. 1919-1926.
- Eremenko, A and A. Gabrielov, 2002, "Pole placement by static output feedback for generic linear systems". SIAM J. Control Optim. 41(1), 303{312.
- Gadewadikar, Jyotirmay, Frank L. Lewis and Murad Abu-Khalaf, 2006, "Necessary and sufficient conditions for H_∞ static output-feedback control. Journal of Guidance, Control, and Dynamics 29(4), pp. 915-924.
- Ghaoui L; Francois O and Mustapha A, 1997, "A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems". IEEE Transactions on Automatic Control 42(8), 1171{1176.
- He Y, M. Wu and J.H. She, 2005, "Improved bounded-real-lemma representation and H_∞ control of systems with polytopic uncertainties". IEEE Trans. on Autom. Control 52(7), pp. 380-383.
- Didier H; Löfberg J; Kocvara M and Stingl M, 2005, "Solving polynomial static output feedback problems with PEN-BMI". In: Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision

- and Control (IEEE, Ed.). Vol. 1. Sevilla, Spain. pp. 7581-7586.
- Jinzhi W and Zhang J, 2001, "An LMI approach to static output feedback stabilization for linear systems". Control Theory and Applications 18(6), pp. 843-846.
- Kanev S; C Scherer; M. Verhaegen and B. De Schutter, 2004, "Robust output-feedback controller design via local BMI optimization". Automatica 40, pp. 1115-1127.
- Lee, Kwan Ho, Joon Hwa Lee and Wook Hyun Kwon, 2006, "Sufficient LMI conditions for H_∞ output feedback stabilization of linear discrete-time systems". IEEE Trans. on Automatic Control 51(4), pp. 675-680.
- Oliveira M; Geromel J and J. Bernussou, 2002, "Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems". Int. J. of Control 75(9), pp. 666-679.
- Pipeleers G; Bram D; Jan S and Lieven V, 2009, "Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems". Systems & Control Letters 58, pp. 510-518.
- Ríos-Bolívar A, Rivas-Echeverria F and Mousalli-Kayat G, 2009a, "Extended static output feedback: An H_2 - H_∞ control setting". WSEAS Transactions on Systems and Control 4(7), pp. 286-295.
- Ríos-Bolívar, A, F. Rivas-Echeverria and G. Mousalli-Kayat, 2009b, " H_∞ control by extended static output feedback". In: ROCOM'09: Proc. of the 9th WSEAS International conference on Robotics, control and manufacturing technology. WSEAS. Stevens Point, Wisconsin, USA. pp. 50-55.
- Rosinová D and V Veselý, 2004, "Robust static output feedback for discrete-time systems - LMI approach". Periodica Polytechnica Ser. El. Eng. 48(3-4), pp. 151-163.
- Syrmos C; Abdallah P; Dorato and K. Grigoriadis, 1997, "Static output feedback: A survey". Automatica 33(2), pp. 125-137.
- Xu S; Lam J and Y. Zou, 2007, "New versions of bounded real lemmas for continuous and discrete uncertain systems". Circuits Syst. Signal Process 26, pp. 829-838.
- Yang K; Orsi R and Moore J, 2004, "A projective algorithm for static output feedback stabilization". In: Proc. of IFAC World Congress. Vol. 1. England. pp. CD-Rom.
- ZHANG, Yan-hu; Wen-jun YAN, Jian-ning LU and Guang-Zhou ZHAO, 2005, "Multi-objective robust controller synthesis for discrete-time systems with convex polytopic uncertain domain". Journal of Zhejiang University SCIENCE 6A, pp. 87-93.

Recibido: 26 de febrero de 2010

Revisado: 31 de enero de 2011