

Procedimientos matemáticos para la modelación geométrica de dientes de engranajes de perfil evolvente

Mathematical procedures for geometrical modeling of involute profile spur gear tooth

L.O. Cotaquispe Z.
Facultad de Ciencias e Ingeniería, Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú
lcotaqu@pucp.edu.pe

R. Franco R., J. Moya R.
Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas
Santa Clara. Villa Clara. Cuba
rfranco@fim.uclv.edu.cu
jorgemr@fim.uclv.edu.cu

Resumen

En el presente trabajo se desarrolla un método que permite obtener el modelo geométrico de un diente de engranaje exterior, recto y de perfil evolvente. El método consiste en sustituir la zona evolvente del flanco del diente y la zona de redondeo trocoidal del pie del diente por arcos de circunferencia. El mismo tiene un enfoque general, permitiendo modelar ruedas corregidas y con cualquier número de dientes, por lo que es aplicable en sistemas CAD que requieran obtener estos modelos con elevada precisión.

Palabras claves: Modelación geométrica, engranajes, trocoide.

Abstract

A method that allows obtaining the geometric model of a spur gear tooth with involute profile is developed in this work. The method consists on substituting the involute flank and trochoidal fillet of the gear tooth by circular arcs. This is a general method that allows to model gears with modified addendum and with any number of teeth. It can be used in CAD systems that require accurate models.

Key words: Geometrical modeling, gears, trochoidal fillet.

1 Introducción

Son pocos los sistemas CAD que permiten la modelación geométrica de los dientes de engranaje de perfil evolvente, y los que lo hacen, como es caso del Mechanical Desktop Power Pack de Autodesk, sustituyen las curvas que forman el perfil del diente por segmentos rectos. La utilización de este método, aunque puede ser el más sencillo, trae como consecuencias que, para sustituir con elevada precisión el perfil del diente se necesite un gran número de segmentos rectos y de puntos; por otra parte los fenómenos relacionados con el contacto de los dientes pueden sufrir irregularidades apreciables.

No cabe dudas de que, si las curvas que forman el perfil del diente son sustituidas por arcos de circunferencia, se obtiene un modelo de mayor calidad. En primer lugar puede disminuirse considerablemente la cantidad de arcos a utilizar en relación con los segmentos rectos, obteniéndose precisiones similares e incluso mayores. En segundo lugar el contacto de los dientes seguirá siendo entre curvas suaves muy próximas a la realidad.

A partir de estas consideraciones se decide emprender el trabajo que se desarrolla a continuación, con el objetivo de obtener un método que permita sustituir las curvas que forman el perfil del diente por arcos de circunferencia.

La circunferencia de paso del engranaje, con radio rp , rueda siempre sin deslizamiento por encima de una línea de división de la herramienta, en la Fig. 2-a esta es la línea definida por los puntos P y A' . Como el punto A pertenece a la herramienta, entonces está rígidamente unido a la línea antes mencionada y su trayectoria describe, considerando fija la circunferencia de paso, una evolvente alargada.

El origen de esta curva se toma comúnmente cuando el punto A' coincide con el punto de tangencia de la recta y de la circunferencia de paso, posición representada en la Fig. 2-b. El ángulo γ , que determina el punto de inicio de la evolvente alargada, debe encerrar en la circunferencia de paso un arco de longitud igual al segmento $\overline{PA'}$, siendo entonces:

$$\gamma = \frac{\overline{PA'}}{rp} \quad (3)$$

$$\overline{PA'} = l + \frac{rc}{\cos(\alpha c)} + (he - rc) \cdot \text{tg}(\alpha c) \quad (4)$$

donde: l = mitad del espacio entre dientes de la herramienta por la línea de referencia
 he = altura de la cabeza del diente de la herramienta

En el sistema de módulo las magnitudes l , he y rc se determinan de la siguiente forma:

$$l = \frac{\pi}{4} \cdot m \quad (5)$$

$$he = (f + c) \cdot m \quad (6)$$

$$rc = fr \cdot m \quad (7)$$

donde: m = módulo de la herramienta (mm)
 f = factor de altura del diente (comúnmente $f=1$)
 c = factor de holgura radial (comúnmente $c=0.25$)
 fr = factor del radio de redondeo (comúnmente $fr=0.4$)

La ecuación paramétrica (tomando como parámetro el ángulo φ_t) de la evolvente alargada se escribe normalmente para la posición que se muestra en la Fig. 3-a:

$$\begin{aligned} x &= rp - d \cdot \cos(\varphi_t) + rp \cdot \varphi_t \cdot \text{sen}(\varphi_t) \\ y &= rp - d \cdot \text{sen}(\varphi_t) - rp \cdot \varphi_t \cdot \cos(\varphi_t) \end{aligned} \quad (8)$$

donde: φ_t = ángulo entre el radio rp , perpendicular a la recta generatriz, con el eje x
 d = distancia del punto a la recta generatriz

$$d = \overline{AA'} = he - rc - s \quad (9)$$

$$s = x \cdot m \quad (10)$$

Si la trocoide forma una curva paralela a la evolvente alargada a una distancia rc , entonces su ecuación paramétrica puede obtenerse a partir de (8) como:

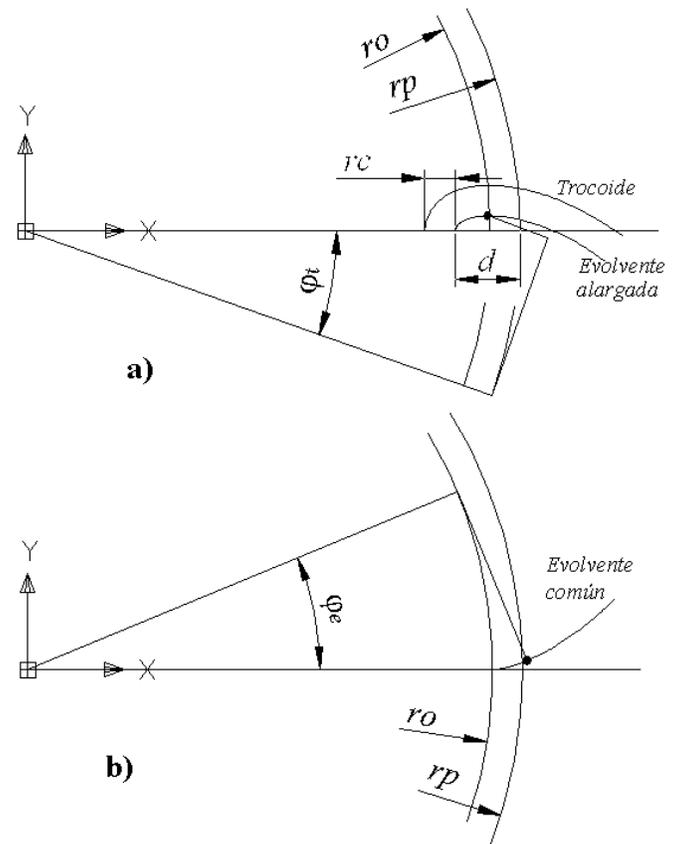


Fig. 3. a) Evolvente alargada y trocoide
 b) Evolvente común

$$\begin{aligned} x_t &= x + rc \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y_t &= y - rc \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (11)$$

Puesto que :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = d \cdot \text{sen}(\varphi_t) + rp \cdot \varphi_t \cdot \cos(\varphi_t) \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = -d \cdot \cos(\varphi_t) + rp \cdot \varphi_t \cdot \text{sen}(\varphi_t) \end{aligned} \quad (12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (8) y (12) en (11), y reduciendo términos semejantes se obtienen finalmente las ecuaciones paramétricas (13) de la trocoide.

La ecuación paramétrica (tomando como parámetro el ángulo φ_e) de la evolvente común se escribe normalmente para la posición que se muestra en la Fig. 3-b, tomando la forma que se refleja en la ecuación (14).

$$x_t = \left(rp - d \cdot \left(1 + \frac{rc}{\sqrt{d^2 + (rp \cdot \varphi_t)^2}} \right) \right) \cdot \cos(\varphi_t) + \left(1 + \frac{rc}{\sqrt{d^2 + (rp \cdot \varphi_t)^2}} \right) \cdot rp \cdot \varphi_t \cdot \sin(\varphi_t) \quad (13)$$

$$y_t = \left(rp - d \cdot \left(1 + \frac{rc}{\sqrt{d^2 + (rp \cdot \varphi_t)^2}} \right) \right) \cdot \sin(\varphi_t) - \left(1 + \frac{rc}{\sqrt{d^2 + (rp \cdot \varphi_t)^2}} \right) \cdot rp \cdot \varphi_t \cdot \cos(\varphi_t)$$

$$\begin{aligned} x &= ro \cdot \cos(\varphi_e) + ro \cdot \varphi_e \cdot \sin(\varphi_e) \\ y &= ro \cdot \sin(\varphi_e) - ro \cdot \varphi_e \cdot \cos(\varphi_e) \end{aligned} \quad (14)$$

donde: φ_e = ángulo que forma el radio
ro = perpendicular a la recta generatriz, con eje X

Para que la evolvente y la trocoide dada por las ecuaciones (13) mantengan la misma posición relativa que la mostrada en la Fig. 2-b, resulta necesario girar el sistema de coordenadas de la Fig. 3-b un ángulo igual a $(\gamma - \beta)$.

Luego las ecuaciones de la evolvente se obtienen transformando las expresiones (14) como sigue:

$$\begin{aligned} x_e &= x \cdot \cos(\gamma - \beta) - y \cdot \sin(\gamma - \beta) \\ y_e &= x \cdot \sin(\gamma - \beta) + y \cdot \cos(\gamma - \beta) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} x_e &= ro \cdot [\cos(\gamma - \beta) + \sin(\gamma - \beta) \cdot \varphi_e] \cdot \cos(\varphi_e) - ro [\sin(\gamma - \beta) - \cos(\gamma - \beta) \cdot \varphi_e] \cdot \sin(\varphi_e) \\ y_e &= ro \cdot [\cos(\gamma - \beta) + \sin(\gamma - \beta) \cdot \varphi_e] \cdot \sin(\varphi_e) + ro [\sin(\gamma - \beta) - \cos(\gamma - \beta) \cdot \varphi_e] \cdot \cos(\varphi_e) \end{aligned} \quad (16)$$

3 Determinación del punto de intersección entre la evolvente y la trocoide

Una vez obtenidas las ecuaciones de la evolvente (16) y de la trocoide (13), con respecto a un mismo sistema de referencia, puede determinarse el punto de intersección de ambas curvas (ver punto Q Fig. 2-b), lo cual es de gran importancia para establecer los límites del perfil del diente.

La condición que determina el punto de intersección está dada por:

$$x_e = x_t \quad (17)$$

$$y_e = y_t \quad (18)$$

Las igualdades (17) y (18) forman un sistema de ecuaciones no lineales con dos incógnitas, que son φ_e y φ_t . Si se elevan al cuadrado ambos miembros en ambas ecuaciones y luego se suman, se obtiene φ_e en función de φ_t :

$$\varphi_e = \sqrt{\frac{\left(rp - d \cdot \left(1 + \frac{rc}{\sqrt{d^2 + (rp \cdot \varphi_t)^2}} \right) \right)^2 + \left(1 + \frac{rc}{\sqrt{d^2 + (rp \cdot \varphi_t)^2}} \right) \cdot (rp \cdot \varphi_t)^2}{ro^2}} - 1 \quad (19)$$

Sustituyendo x_t de (13) y x_e de (16) en (17) se obtiene:

$$E_1 \cdot \cos(\varphi_e) + E_2 \cdot \sin(\varphi_e) - T_1 \cdot \cos(\varphi_t) - T_2 \cdot \sin(\varphi_t) = 0 \quad (20)$$

donde:

$$E_1 = ro \cdot [\cos(\gamma - \beta) + \sin(\gamma - \beta) \cdot \varphi_e] \quad (21)$$

$$E_2 = -ro \cdot [\sin(\gamma - \beta) - \cos(\gamma - \beta) \cdot \varphi_e] \quad (22)$$

$$T_1 = rp - d \cdot \left(1 + \frac{rc}{\sqrt{d^2 + (rp \cdot \varphi_t)^2}} \right) \quad (23)$$

$$T_2 = rp \cdot \varphi_t \cdot \left(1 + \frac{rc}{\sqrt{d^2 + (rp \cdot \varphi_t)^2}} \right) \quad (24)$$

La solución de la ecuación (20), luego de sustituir φ_e por (19), permite obtener el valor de φ_t correspondiente al punto de intersección o final de la trocoide (φ_t^f).

Para solucionar la ecuación (20) resulta evidente que debe aplicarse algún método numérico, lo cual no se aborda en este trabajo.

El valor calculado φ_t^f se sustituye en (19) y se obtiene el valor de φ_e para el mismo punto de intersección o inicio de la evolvente (φ_e^i).

De esta manera quedan determinados los valores extremos de los parámetros φ_e y φ_t , es decir, los valores que definen los puntos de inicio y fin de las curvas evolvente y trocoide que forman el perfil del diente.

Para el caso de la zona formada por la trocoide el parámetro φ_t varía desde cero ($\varphi_t^i = 0$, punto sobre el radio de fondo ri) hasta el valor calculado φ_t^f .

Para la zona evolvente el parámetro φ_e varía desde el valor calculado φ_e^i hasta el valor correspondiente al punto sobre el radio exterior re , el cual se determina por:

$$\varphi_c^f = \sqrt{\left(\frac{re}{ro}\right)^2 - 1} \quad (25)$$

4 Sustitución de las curvas originales por arcos de circunferencia

El procedimiento para la sustitución de ambas curvas es similar. El rango de valores del parámetro, determinado por los puntos de inicio y fin de la curva correspondiente, se divide en n intervalos de igual magnitud ($\Delta\varphi$), quedando definidos $n+1$ puntos sobre dicha curva, lo que se expresa de la siguiente forma:

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi^f - \varphi^i}{n} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} x_k &= x(\varphi^i + (k-1) \cdot \Delta\varphi) \\ y_k &= y(\varphi^i + (k-1) \cdot \Delta\varphi) \end{aligned} \quad k = 1, \dots, n+1 \quad (27)$$

donde: φ^i = ángulo de inicio de la curva correspondiente
 φ^f = ángulo final de la curva correspondiente
 x_k, y_k = coordenadas del punto k sobre la curva

Los arcos de circunferencia se trazan para cada pareja de puntos contiguos, esto significa que el número de arcos será igual al número de intervalos (n). Cada arco deberá cumplir la condición de tangencia en el punto de unión con el arco anterior, de manera que se mantenga la suavidad de la curva que forma el perfil del diente.

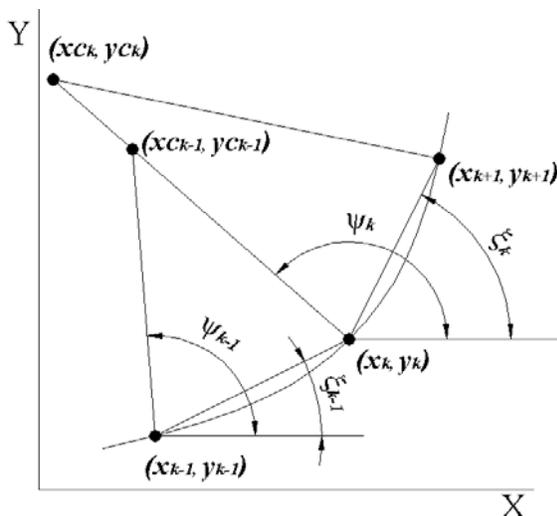


Fig. 4. Entorno a la sustitución de una curva por arcos de circunferencia

En la Fig. 4 se observa una curva arbitraria donde se representan los parámetros que intervienen en la obtención del radio del arco sustituto y de las coordenadas de su

centro, entre otros. Tomando como base esta figura se deduce que:

$$l_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} \quad (28)$$

$$\xi_k = \arctg\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}\right) \quad (29)$$

$$Rc_k = \frac{l_k}{2 \cdot \cos(\psi_k - \xi_k)} \quad (30)$$

$$xc_k = x_k + Rc_k \cdot \cos(\psi_k) \quad (31)$$

$$yc_k = y_k + Rc_k \cdot \text{sen}(\psi_k)$$

$$\psi_{k+1} = \arctg\left(\frac{yc_k - y_{k+1}}{xc_k - x_{k+1}}\right) \quad (32)$$

donde: l_k = longitud del segmento que une los puntos k y $k+1$

ξ_k = ángulo del segmento l_k con respecto al eje X

Rc_k = radio de curvatura entre los puntos k y $k+1$

x_{ck}, y_{ck} = coordenadas del centro de radio de curvatura k

ψ_k = ángulo del segmento que une el segundo punto del arco k y su centro, respecto al eje X

Para el primer intervalo (primer arco) el ángulo ψ_1 debe determinarse según el tipo de curva, y está dado por la unión del primer punto con el centro del radio de curvatura de éste. Para el caso de la trocoide el radio de curvatura en el primer punto coincide con el eje X (ver Fig.3-a), por tanto:

$$\psi_1 = 0 \quad (33)$$

Para la evolvente el radio de curvatura es siempre tangente a la circunferencia básica, es decir que coincide con la recta generatriz. A partir de la Fig. 3-b, teniendo en cuenta el giro que debe darse a este sistema como ya se explicó, se obtiene:

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi_c^i + \gamma - \beta \quad (34)$$

5 Conclusiones y recomendaciones

- El método presentado en este trabajo permite conocer un poco más sobre la verdadera geometría de los dientes de engranajes evolventes que se obtienen por generación, sobre todo en lo relacionado con la curva de redondeo en la zona del pie del diente, denominada trocoide.
- El enfoque general de la solución propuesta, aplicable

para ruedas con cualquier número de dientes y desplazamiento de la herramienta, permite contar con un método preciso para la modelación de estos elementos, el cual garantiza que durante el análisis del contacto de los dientes no se cometan errores significativos.

- Se recomienda que para la implementación del método se analice la posibilidad de obtener una ecuación de regresión más sencilla, a partir de la solución numérica de la ecuación no lineal abordada en el trabajo.

Referencias

- <http://www.mech.uwa.edu.au/DANotes/gears/appendices.pdf>, Geometry of the Involute Gear Tooth, Appendix B.
- Baránov GG, 1988, Curso de la teoría de mecanismos y máquinas, Ediciones MIR, Moscú.
- Moya JL, 1988, Proyecto de curso teoría de mecanismos y máquinas, UCLV.
- Rektorys K, 1968, Prehled užití matematiky, Praha.