

H-adaptatividad en un programa comercial de elementos finitos

H-adaptivity in a finite elements commercial program

M. J. Vergara*, L. T. Araujo, L. E. Vergara
Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Los Andes. Mérida. Venezuela
*vmmary@ing.ula.ve, lennytha@hotmail.com, lvergara@pg.ing.ula.ve

Resumen

Las estrategias adaptables son herramientas del método de elementos finitos (MEF) para obtener soluciones numéricas con una exactitud controlada; de hecho para algunos problemas no lineales, la solución según el MEF no puede ser calculada sin estrategias adaptables. En un procedimiento adaptativo son necesarios dos requisitos, el primero de ellos es una herramienta para evaluar el error de la solución calculada con una malla específica, lo cual se logra con el uso de estimadores de error para obtener una medida según una norma dada y la segunda corresponde a un algoritmo que realice una nueva discretización espacial, basado en el error medido por el estimador. Por otro lado el error estimado en cada etapa del proceso debe dar una orientación de la calidad de la solución evaluada a través del índice de efectividad. En este trabajo se aplica el proceso h-adaptativo a problemas con solución exacta conocida usando Ansys. El estudio se basa en el análisis de los índices de efectividad del estimador con la finalidad de dar una orientación respecto al uso de programas comerciales para este tipo de procesos.

Palabras claves: Elementos finitos, h-adaptatividad, refinamiento, velocidad de convergencia.

Abstract

The H-adaptivity strategies are tools used in the finite element method (FEM) to obtain numeric solutions with a controlled accuracy. In fact, for some non-linear problems, the solution of FEM cannot be calculated without adaptive strategies. In an adaptive procedure is necessary to fulfill two requirements. The first is to evaluate the calculated solution error when using a specific mesh; this is achieved employing error estimators to measure the error according to a given norm. The second is an algorithm that carry out a new space discretization, based on the estimator measured error. On the other hand, the estimated error in each stage of the process must give an orientation of the evaluated solution quality through the index of effectiveness. In this work the h-adaptivity process is applied to problems with know exact solution using Ansys. The study is based on the analysis of the estimator effectiveness indexes with the purpose of give an orientation regarding the use of commercial programs for this type of processes.

Key words: Finite element, h-adaptivity, refinement, convergent rate.

1 Introducción

El método de los elementos finitos (MEF) es una herramienta muy eficaz utilizada para la resolución de ecuaciones del tipo diferencial, integral o integro-diferencial. Este método se ha generalizado en la solución de problemas en ingeniería, lo que ha traído como consecuencia su uso extensivo y la necesidad de obtener resultados más confiables. Para conseguir esto, no basta con asegurar la convergencia hacia una solución dada por el método, si no que se deben aplicar técnicas que permitan medir la calidad de la solución.

Una forma de mejorar la exactitud de las soluciones obtenidas mediante el MEF consiste en la utilización de procesos iterativos denominados adaptativos (Johnson y Hnasbo, 1992), que mejoran la calidad de la solución enriqueciendo la aproximación, de tal forma que se consiga minimizar el error entre la solución exacta del problema y la solución MEF.

Un proceso adaptativo ampliamente desarrollado es el que utiliza resultados intermedios para minimizar un error a través de la disminución del tamaño de los elementos, dicho proceso es denominado refinamiento h-adaptativo.

La evaluación exacta del error existente en una determinada aproximación a la solución de un problema es imposible sin conocer la solución exacta del mismo; sin embargo es posible estimar dicho error de manera razonable mediante el uso de estimadores del error, los cuales se basan en la mejora de la solución de MEF.

El índice de efectividad se utiliza para estudiar la fiabilidad de los estimadores de error, lo que permite aumentar la confianza en los resultados del MEF.

En este trabajo se hace un estudio del índice de efectividad que se obtiene en problemas estructurales bidimensionales y tridimensionales usando Ansys.

2 Estimación del error

En el caso de problemas de elasticidad se utiliza ampliamente como estimador del error la norma energética del error debido a su relación directa con la energía del sistema, esta norma está definida según (Zienkiewicz, 1987) para cada elemento "i" como:

$$\|e_i\| = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \{\Delta\sigma\}^t [D]^{-1} \{\Delta\sigma\} d\text{Vol} \quad (1)$$

donde: $[D]$ es la matriz de constantes elásticas, $\{\Delta\sigma\}$ es el vector error de tensiones en el elemento, y por lo tanto:

$$\{\Delta\sigma_n^i\} = \{\sigma_n^a\} - \{\sigma_n^i\} \quad (2)$$

$\{\Delta\sigma_n^i\}$ es el vector error de tensiones del nodo n de elemento i, $\{\sigma_n^a\}$ es el vector de tensiones promediado en el mismo nodo como se muestra en la Ec. (8).

Por otro lado para todo el dominio con N_r elementos, la norma del error se define como:

$$\|e\| = \sum_{i=1}^{N_r} e_i \quad (3)$$

El error en norma energética puede ser normalizada con la energía de deformación según:

$$E = 100 \left(\frac{\|e\|}{U + \|e\|} \right)^2 \quad (4)$$

que representa el porcentaje de error en norma energética y U es la energía de deformación sobre el modelo calculada como:

$$U = \sum_{i=1}^{N_r} E_{ei}^{po} \quad (5)$$

siendo E_{ei}^{po} la energía de deformación para el elemento i, más generalmente expresada según:

$$E_{ei}^{po} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{int}} \{\sigma\}^T [D] \{\sigma\} \text{Vol}_i \quad (6)$$

donde N_{int} corresponde al número de puntos de integración y Vol_i el volumen sobre los mismos puntos.

3 Índice de efectividad

Para estudiar la fiabilidad de los estimadores del error se define el índice de efectividad ξ , como la relación entre los valores del error estimado y el error exacto.

$$\xi^2 = \frac{\|e\|}{U_{ex} - (U - \|e\|)} \quad (7)$$

El estimador del error se dice que es exacto si el índice de efectividad tiende asintóticamente a la unidad cuando el tamaño de los elementos tiende a cero. Sin embargo, si el índice de efectividad tiende a un valor estable, diferente de la unidad, cuando el tamaño de los elementos tiende a cero, es posible definir un factor de corrección para el estimador del error que mejore la calidad de la estimación. En los casos donde la solución exacta (U_{ex}) no es conocida esta se sustituye por una solución aproximada, obtenida a partir de una malla altamente refinada. En el estudio numérico realizado no se ha definido ningún factor de corrección ya que la idea es medir directamente los valores del mallado adaptativo aplicado por Ansys.

4 Suavizado de tensiones y procedimiento h- adaptativo

Se ha visto anteriormente que es necesario obtener un campo mejorado de tensiones para estimar el error de discretización. La precisión en la estimación del error dependerá entonces del campo mejorado. Entre las técnicas de postproceso que permiten hacer continuo estos campos se encuentran el promediado directo de tensiones en nodos, técnicas basadas en métodos de mínimos cuadrados y los métodos de alisado de tensiones por zonas. Para los ejemplos numéricos que se presentan en este trabajo se ha utilizado el método promediado directo de tensiones en nodos que es la técnica que utiliza el programa ANSYS, y el cual se aplica según:

$$\{\sigma_n^a\} = \frac{\sum_{i=1}^{N_e^n} \sigma_n^i}{N_e^n} \quad (8)$$

donde $\{\sigma_n^i\}$ corresponde al vector de tensiones de la solución de MEF y N_e^n es el numero de los elementos conectados al nodo.

En un proceso de análisis por el MEF, cuando el error obtenido se encuentra dentro de los límites preestablecidos por el analista, la solución es acepta como respuesta al problema. Sin embargo, frecuentemente ocurre que estos límites se ven superados y es necesario repetir el proceso en busca de mejores resultados.

El procedimiento estudiado, para mejorar la solución de elementos finitos consiste en reducir el tamaño de los elementos de la malla para un nuevo análisis hasta encontrar los errores deseados (h-adaptatividad) el cual se define en Ansys según la función ADAPT, ejecutada iterativamente en el proceso de refinamiento.

5 Implementación numérica

Este estudio se realiza para problemas en 2D y 3D con solución suave (cilindro) y con singularidades (grieta). Los refinamientos adaptativos se llevan a cabo empleando elementos lineales y cuadráticos, tomando un máximo de diez iteraciones y un 1% de error. Los datos para la resolución de cada problema se muestran en el siguiente apartado.

Problemas

El primer problema es el de un cilindro de radio interior 5 y exterior 20, sometido a una presión interna P=10. Las características del material del cilindro están dadas por: $\nu = 0.3$ y $E=1000$.

El segundo problema es el de grieta con F= -1000 y características del material dadas por $\nu = 0.333$ y $E=1000000$.

Casos

Para aplicar el mallado adaptativo se estudiaron cuatro casos, que se encuentran tabulados en la Tabla 1, con los valores de error en porcentaje según la Ec. (4) y los grados de libertad (gdl) activos sobre cada malla, a partir de los cuales se calcula el índice de efectividad.

Los tres primeros casos se desarrollan para problemas bidimensionales. El primer caso corresponde al empleo de elementos lineales cuadriláteros, el segundo al de elementos cuadráticos cuadriláteros y el tercero al de elementos cuadráticos triangulares. El ultimo caso se refiere a problemas tridimensionales con elementos cuadráticos tetraédricos, ya que para el caso de la grieta no fue posible aplicar el proceso adaptativo con elementos hexaédricos.

Tabla 1. Error para cada mallado adaptativo

	Lineal		Cuadráticos					
	Cuadriláteros		Cuadriláteros		Triángulos		Tetraedros 3D	
	gdl	E %	gdl	E %	gdl	E %	gdl	E %
Cilindro	36	40.69	48	15.06	60	40.79	210	12.69
	1056	7.28	1394	0.05	1836	0.99	279	6.04
	13440	1.94					296	7.33
	16512	1.85					310	6.29
	16684	1.84					316	6.4
	**1							339
Grieta	63	10.23	178	13.46	106	13.98	134	15.29
	275	5.92	768	6.43	234	10.69	325	11.52
	485	4.76	1088	3.69	282	8.68	402	10.59
	996	4.50	1724	1.95	286	9.82	449	10.99
	1315	4.61	1884	1.44	360	7.25	450	10.26
	2625	3.6	2676	0.71	336	7.19	453	11.31
	3596	3.24			340	6.25	478	10.13
	4637	2.44			356	6.25	491	9.87
					356	6.25	499	10.87
						515	10.64	

Análisis de efectividad

Para realizar un análisis de la efectividad de cada caso se utiliza la Ec. (7) y se grafica en función de los gdl para cada caso como se muestran en las Figs. 1, 2 y 3, donde también se observan los mallados inicial y final para los problemas modelados. El Proceso adaptativo con elementos lineales para ambos problemas presentan una efectividad muy cercana a la unidad, según lo establecido

teóricamente. Sin embargo en ninguno de los casos el %E preestablecido como 1% ha sido alcanzado (observar la tabla 1). Para el caso del cilindro, después del segundo mallado adaptativo, al refinar la malla no se consiguen mejoras significativas del error; de hecho los dos últimos procedimientos adaptativos no logran disminuir el error si no que se mantiene constante. En el caso de la grieta el enriquecimiento de la malla es lento, sin embargo se consigue disminuir el error mejorando la efectividad.

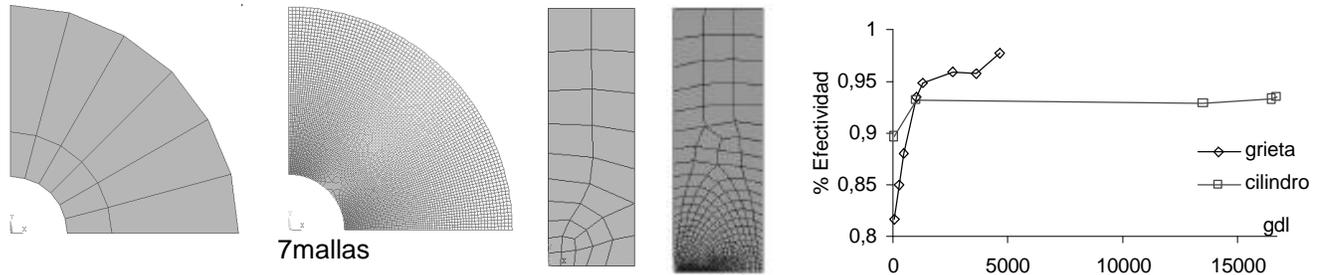


Fig. 1. Elementos lineales

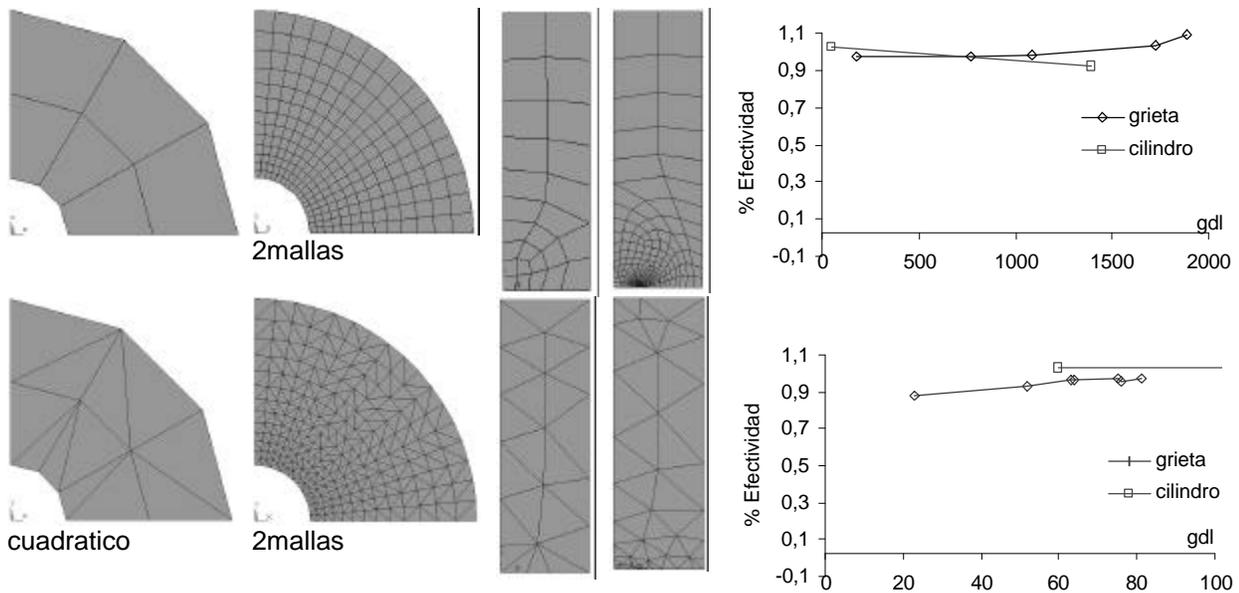


Fig. 2. Elementos cuadráticos

Para problemas con elementos cuadráticos cuadriláteros el error establecido se alcanza, pero la efectividad en el proceso adaptativo para este problema muestra en la malla final una tendencia a tener un refinamiento uniforme. En el caso de la grieta la tendencia de la efectividad es hacia la unidad y no presenta refinamiento del tipo uniforme. Cuando se tienen elementos cuadráticos triangulares el error establecido se alcanza para el problema del cilindro,

con un proceso adaptativo para la malla análogo al obtenido cuando se utilizan elementos lineales. Para la grieta el %E no se alcanza y el proceso adaptativo tiene una característica oscilatoria con tendencia a la unidad. Para los problemas 3D analizados aquí se observa que aun cuando el índice de efectividad tiende a la unidad, el proceso de enriquecimiento de elementos no tiende a disminuir el error como se muestra en la tabla 1.

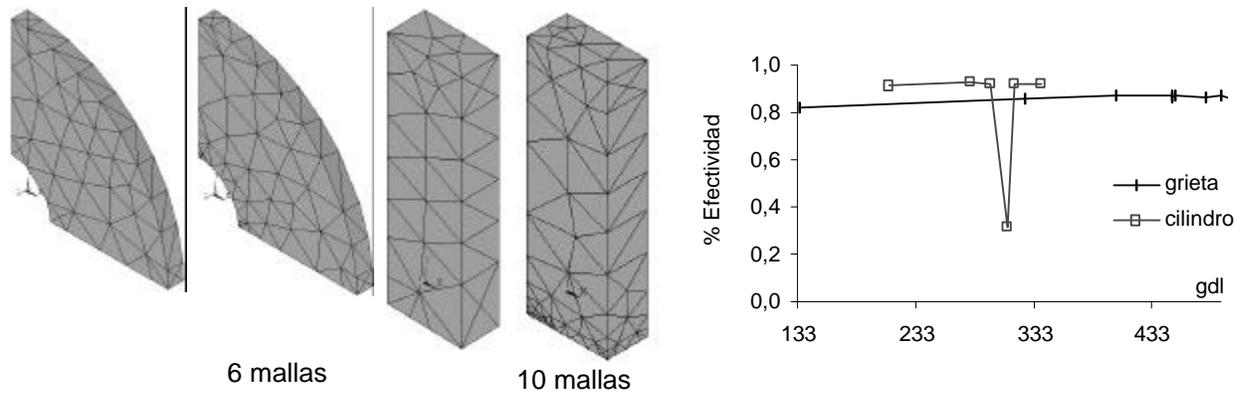


Fig. 3. Elementos cuadraticos 3D

7. Conclusiones

El mallado adaptativo disminuye significativamente el error alrededor de los dos primeros procedimientos adaptables cuando se resuelve el problema bidimensional con solución suave. Un enriquecimiento posterior no mejora significativamente los resultados de EF.

En general el proceso adaptativo genera un enriquecimiento excesivo sobre la malla en cada etapa, originando así mallas semejantes a las obtenidas con procesos de refinamiento uniforme lo que incrementa el tiempo y espacio de cálculo.

Aun cuando los problemas estudiados son de poca complejidad (relativamente), el proceso adaptativo no es asegurado de acuerdo al desarrollo teórico planteado, lo que sugiere un minucioso análisis para problemas más complejos.

Finalmente es importante resaltar el hecho de que al enriquecer con elementos la malla el proceso adaptativo, se pierde la información de la geometría inicial con lo cual a pesar de que se disminuye el error no existe una posibilidad de optimizar la malla en cuanto a la cobertura del dominio original.

Referencias

- ANSYS ANSYS, Inc 1994 Company. (Licencia UPV).
- Boroomand B and Zienkiewicz O, 1997, Recovery by equilibrium in patches (REP), *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 137-164.
- Johnson C y Hnasbo P, 1992, Adaptive finite elements methods in computational mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. pp. 142-181.
- Wiberg N, Abdulwahab Fand ZS, 1994, Enchanted superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary condition, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, pp.3417-3440.
- Zienkiewicz OC y Zhu JZ, 1992, The superconvergent path recovery (SPR) and adaptive finite element refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 101, pp 207-224.
- Zienkiewicz OC y Zhu JZ, 1987, A simple error estimates and adaptive procedure for practical engineering analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 24, pp. 337-357.