

Influencia de las interacciones locales versus globales en un modelo de intercambio económico estratificado

Influence of local versus global interactions in a model for stratified economic exchange

Herrera, José Luis^{1,*}; Escalona-Morán, Miguel¹; Parra, Rafael¹; Parra, Carlos² y Cosenza, Mario G.³

¹Departamento de Cálculo,

Escuela Básica, Facultad de Ingeniería;

²Departamento de Matemáticas; ³Centro de Física Fundamental; Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela.

*jherrera@ula.ve

Resumen

Se estudia la influencia del carácter local o global de las interacciones entre agentes económicos en un modelo econofísico de intercambio de recursos estratificado, donde los agentes están restringidos a interactuar si pertenecen a un mismo estrato económico. El estrato viene dado a través de un umbral para la interacción, el cual permite comparar las riquezas relativas entre cualquier par de agentes económicos. Se caracteriza el estado colectivo asintótico del sistema mediante dos variables estadísticas: el coeficiente de Gini, que mide el grado de desigualdad en un sistema económico, y la actividad, que expresa la cantidad total de recursos intercambiados en el sistema. Se evidencia una diferencia apreciable en los valores del coeficiente de Gini para interacciones locales con respecto a las globales. Los resultados muestran que la localidad en las transacciones es importante para alcanzar distribuciones equitativas de riqueza en el sistema.

Palabras Clave: Econofísica, coeficiente de Gini, redes complejas.

Abstract

A model of interacting economic agents in a stratified society with local and global interactions is studied. Neighboring agents interact if they belong to the same economic stratum. The stratum is implemented as a threshold for interaction, which compares the relative wealth of two agents. The collective properties of the system in its asymptotic state are characterized by means of two statistical variables: the Gini coefficient that measures the degree of inequality in an economic system, and the activity, a quantity that expresses the total amount of resources exchanged in the system. The values of the Gini coefficient for the cases of local and global interactions are different. Our results show that locality in the transaction is relevant in order to reach equitable distributions of wealth in the system.

Keywords: Econophysics, Gini coefficient, complex networks.

1 Introducción

A partir del influyente artículo publicado por Watts y Strogatz en 1998 (Watts et al., 1998), ha surgido un creciente interés por el estudio del rol de la topología en el comportamiento de diversos sistemas dinámicos. De pronto nos vemos rodeados de redes complejas que subyacen en la mayoría de las interacciones de los sistemas, desde las neuronas en el sistema nervioso de los seres vivos (Watts et al., 1998), pasando por Internet (Albert et al., 2002), hasta los contactos sexuales en una sociedad (Liljeros et al., 2001). Sin embargo, a pesar del descubrimiento de la ubicuidad de las redes de interacción, existen muy po-

cos modelos de dinámica económica con una topología subyacente (Ausloos et al., 2007; Herrera et al., 2008). Los modelos de interacción económica propuestos por Chakrabarti (Chakrabarti et al., 2006), Chatterjee (Chatterjee et al., 2007), Yakovenko (Yakovenko, 2007), entre otros, suponen los agentes económicos como partículas de un gas, donde la riqueza equivale a la energía y donde cada agente tiene la posibilidad de interactuar con cualquier otro agente del sistema, intercambiando riqueza, en una interacción tipo colisión donde se conserva la energía total.

Aunque esta forma de analizar los sistemas económicos ha permitido alcanzar importantes avances, carece de un ingrediente importante. Este ingrediente

es el que suministra el estudio actual de las redes complejas, ya que los sistemas económicos también se encuentran inmersos en alguna red de interacción definida por la direccionalidad de las transacciones económicas. En un sistema económico real, todos los agentes que lo conforman no tienen conocimiento del estado de todos los demás, y mucho menos tienen la libertad de interactuar con todos los demás, ya que se imponen restricciones espaciales o geográficas, así como también de tipo social: un agente económico muy rico generalmente está dispuesto a interactuar con otro agente en su mismo estrato económico. Con la idea de conocer el efecto de estas restricciones, Laguna y sus colaboradores (Laguna et al., 2005) han propuesto un modelo de intercambio económico estratificado, donde cualquier par de agentes en un sistema pueden interactuar entre sí solamente si pertenecen a un mismo estrato económico. Posteriormente, Herrera y colaboradores (Herrera et al., 2008) introdujeron la noción de espacio en una extensión de este modelo al permitir sólo interacciones entre agentes vecinos.

En estos dos últimos modelos, la noción de estrato se implementa mediante la comparación de las riquezas de los agentes con respecto a un valor umbral: si el valor absoluto de la diferencia de riquezas es menor que el umbral, entonces los agentes pertenecen al mismo estrato económico y pueden interactuar. El umbral puede tomar cualquier valor positivo. En el presente artículo proponemos una definición alternativa de umbral basado en la diferencia relativa de riqueza entre agentes. Utilizando este concepto de umbral relativo, investigamos la influencia de la topología de la red en el comportamiento colectivo de un sistema económico. Específicamente, estudiamos el modelo de intercambio económico estratificado con interacciones locales y con interacciones globales.

2 Modelo

El modelo consta de N agentes económicos que se encuentran ubicados en los vértices de una red. Consideraremos dos tipos de redes de interacción. En un caso, tenemos una red con interacciones locales que consiste en un arreglo bidimensional con condiciones de borde periódicas, donde cada agente tiene cuatro vecinos inmediatos con los cuales puede interactuar, como se muestra en la Figura 1(a). En otro caso sumamos una red con interacciones globales, donde cada agente puede intercambiar recursos con cualquier otro agente en el sistema, como se muestra en la Figura 1(b).

Cada agente i ($i = 1, \dots, N$), está caracterizado en un instante t por su estado, o riqueza $w_i(t)$, la cual se toma inicialmente de manera aleatoria en el intervalo $w_i(0) \in [0, 1]$. Se asume que la riqueza total del sistema, $W_T = \sum_i^N w_i(t)$, se conserva. Además, cada agente i tiene asociada una aversión al riesgo β_i , que caracteri-

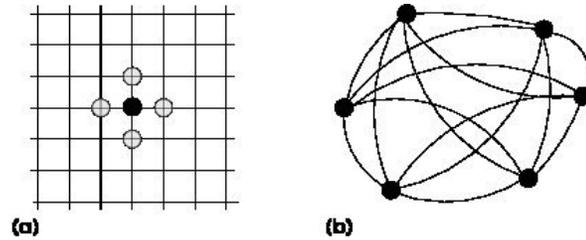


Fig. 1. (a) Red bidimensional con interacciones locales. (b) Red con interacciones globales.

za lo que el agente i está dispuesto a arriesgar en una transacción económica. Al inicio, los valores β_i se distribuyen de manera aleatoria y uniforme en el intervalo $[0, 1]$ y permanecen fijos durante la simulación.

Dada una red, la dinámica del modelo se realiza mediante la iteración del siguiente algoritmo:

1. Seleccione un agente i .
2. Seleccione un agente j entre los vecinos del agente i .
3. Verifique si se cumple la condición:

$$\left| \frac{w_i(t) - w_j(t)}{w_i(t) + w_j(t)} \right| < u. \quad (1)$$

4. Si se cumple 3, calcule la cantidad

$$dw = \min\{w_i[1 - \beta_i]; w_j[1 - \beta_j]\}. \quad (2)$$

5. Asigne la cantidad dw con probabilidad p al agente con menor riqueza entre i y j , y con probabilidad $1 - p$ al de mayor riqueza entre esos agentes, donde p se define como

$$p = \frac{1}{2} + f \left| \frac{w_i - w_j}{w_i + w_j} \right|. \quad (3)$$

El parámetro $f \in [0, 0.5]$ juega el papel de la probabilidad de favorecer al agente de menos recursos en una transacción económica, emulando un sistema con políticas públicas destinadas a redistribuir la riqueza de manera equitativa.

El algoritmo anterior, representa un modelo simple de interacción económica, donde cada agente se encuentra restringido a interactuar con otros agentes pertenecientes su mismo nivel económico. La noción de localidad es introducida por la topología de la red de interacción subyacente, la cual ha sido estudiada anteriormente (Herrera et al., 2008). El ancho del estrato económico se encuentra representado por el parámetro u , que llamamos umbral de interacción. En (Laguna et al., 2005) y (Herrera et al., 2008) se considera que u está dado simplemente por el valor absoluto de la diferencia de riqueza

entre los agentes. En el presente artículo, se considera que u es relativo a la riqueza total de los agentes que interaccionan, como se indica en la Ec. (1). Esto se justifica porque, cuando la riqueza de los agentes que interaccionan es muy alta, aunque su diferencia de riqueza sobrepase el umbral, éstos podrían encontrarse en el mismo nivel o estrato económico.

Entonces, el modelo posee dos parámetros de control, u y f . Nuestro objetivo es estudiar el efecto de estos parámetros sobre el comportamiento colectivo del sistema en su estado asintótico.

Para caracterizar las propiedades estadísticas del sistema utilizamos dos parámetros de orden colectivo. El primero es el coeficiente de Gini. Esta cantidad mide el grado de desigualdad en un sistema económico y está definido como

$$G = \frac{\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (w_i - w_j)}{2N^2\mu}, \quad (4)$$

donde $\mu = W_T/N$ es la riqueza promedio en el sistema. El coeficiente G puede tomar valores entre 0 y 1. Una distribución completamente equitativa de riqueza, donde $w_i = w_j, \forall i, j$, corresponde al valor $G = 0$. Por otro lado, una distribución totalmente desequilibrada, donde un solo elemento posee toda la riqueza del sistema, mientras que los demás tienen riqueza cero, da un valor $G = 1$.

El segundo parámetro de orden es la actividad económica, definida como

$$A = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^T dw_t, \quad (5)$$

donde T es el tiempo de simulación, y τ es el número de iteraciones transientes que se deprecian para asegurar que el sistema se encuentra en su estado asintótico. La actividad A mide la cantidad de riqueza que se ha intercambiado en el sistema durante un intervalo de tiempo $T - \tau$.

3 Resultados

Para la simulación del modelo, hemos empleado $N = 1000$ agentes. El tiempo de simulación es de $T = 10^7$ iteraciones. Los resultados que se muestran a continuación representan el estado asintótico del sistema, es decir, cuando el mismo ha alcanzado un estado estadísticamente estacionario caracterizado por la estabilidad de los valores de los parámetros de orden.

La Figura 2 muestra el coeficiente de Gini en el espacio de parámetros (u, f) , para una red con interacción local y una red con interacción global.

Se observa que, tanto para el caso local como en el caso global, cuando $u < 0.4$ el coeficiente G aumenta independientemente de f . Para el caso local, G aumenta

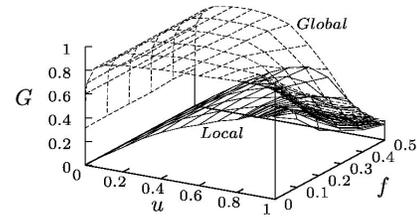


Fig. 2. Coeficiente de Gini en el espacio de parámetros (u, f) para las redes con interacción global y local.

de una manera gradual y constante, mientras que para el caso global, para valores de u pequeños, G aumenta con bastante rapidez hasta alcanzar un valor constante cuando $u < 0.4$. En el caso global, los valores de G son cercanos a 1, mientras que para el caso local, los valores de G son mucho menores que 1. Para $u > 0.4$, el parámetro f comienza a tener un efecto importante en el sistema. A pesar de que los valores de G para ambos casos son diferentes, para valores altos de u y f , el comportamiento de ambos sistemas es similar, caracterizado por una disminución considerable de G en ese rango de parámetros.

En la Figura 3 se muestra la actividad A en el espacio de parámetros (u, f) , en los casos de una red con interacción local y una red con interacción global.

Tanto para la red local como para la red global, la actividad A tiene el mismo comportamiento, como evidencia la Figura 3. Además, se puede ver que la actividad económica aumenta en forma considerable en el estado asintótico de ambos sistemas para valores altos de los parámetros u y f .

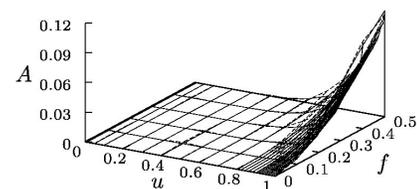


Fig. 3. Actividad económica del sistema en el espacio de parámetros (u, f) para ambas redes, con interacciones global y local.

4 Análisis de los resultados

En el modelo original de Laguna et. al (Laguna et al., 2005), y en el trabajo de Herrera et. al (Herrera et al., 2008), se estudio el comportamiento del intercambio económico estratificado donde el umbral u no estaba acotado, sino que podía tomar valores arbitrariamente grandes. Este umbral arbitrario resulta ser demasiado rígido para la comparación de las riquezas de los agentes económicos. Los resultados mostrados en las Figuras 2 y 3 representan situaciones donde el umbral para la interacción u es relativo.

Para una red con interacciones locales, la Figura 2 muestra un crecimiento gradual y constante del coeficiente G a medida que u aumenta, independientemente del valor de f . El umbral u sólo permite interacciones entre los agentes vecinos más cercanos que poseen riquezas muy similares. Luego de la primera interacción, la diferencia relativa de riquezas entre tales agentes, a pesar de ser pequeña, ya es mayor que el umbral, lo cual conduce a un congelamiento de la actividad en el sistema y a un valor de G pequeño, aproximadamente igual al del inicio de la simulación. A medida que u aumenta, las interacciones entre agentes son más frecuentes en las primeras iteraciones, permitiendo a algunos agentes acumular más riqueza que otros para luego quedar aislados, ya que la mayoría de sus vecinos no estará en su mismo nivel o estrato económico. Esto hace aumentar G hasta un valor máximo. Este incremento muestra una dependencia casi lineal entre G y los parámetros u y f . Cuando G alcanza su valor máximo ($G \approx 1$), f comienza a desempeñar un papel importante en el comportamiento del sistema, para los dos tipos de red considerados. Para valores grandes de u , un agente puede interactuar con cualquiera de sus vecinos y mantener una actividad alta para valores de f grandes, como se muestra en la Figura 3. Como resultado de estas interacciones, los agentes con menores recursos se ven más beneficiados, disminuyendo el coeficiente G en el sistema.

En el caso de interacción global vemos que para valores de u muy pequeños, hay un aumento súbito de G . Esto se debe a que en las primeras iteraciones unos pocos agentes adquieren la mayoría de los recursos del sistema y, puesto que pueden interactuar con todos los demás agentes, acumulan suficiente riqueza que los ubica sobre el umbral de interacción con respecto a la mayoría de los agentes. Sigue existiendo interacción, pero solamente entre aquellos agentes que acumularon suficiente riqueza al comienzo de la simulación. Luego, sólo algunos de los agentes inicialmente ricos del sistema se vuelven más ricos aún, saliendo del umbral de interacción de los pocos agentes que tenían riqueza. Esto hace que el coeficiente G alcance valores muy altos. Todas estas interacciones ocurren en las primeras iteraciones de la simulación, y eventualmente cesan. Por esto, la actividad A en la Figura 3 se hace cero en el estado asintótico del sistema. Así, el parámetro f no puede influir en las interacciones. Este comportamiento se mantiene en un amplio rango de valores de u , donde el valor de G es cercano a 1. Cuando u aumenta lo suficiente, permitiendo la interacción entre todos los agentes del sistema, f empieza a jugar un papel importante, redistribuyendo la riqueza de manera más equitativa, al igual que en el caso de interacción local. La tendencia a que el sistema se vuelva más equitativo es consecuencia de que el incremento del parámetro f favorece a los agentes con menor riqueza en el sistema, haciendo que el coeficiente G disminuya. La disminución de G se asocia a una actividad permanente

del sistema, es decir, a la interacción entre los distintos estratos que conforman el sistema.

Una diferencia importante entre los casos global y local es el valor del coeficiente de Gini G en el estado asintótico. Mientras que en el caso global para un amplio rango de valores de u y f , G tiende al valor 1, este coeficiente disminuye cuando la interacción es local. Este resultado revela la importancia de la topología subyacente de la red de interacciones del modelo económico. Los valores del coeficiente de Gini para los países del mundo (Gini, 2007) se encuentran entre 0.2 y 0.7. Estudios muestran que el país con G mayor (mayor desigualdad) es Namibia, con $G = 0.707$, mientras que el país con una distribución de riqueza más equitativa es Suecia, con $G = 0.23$. Nuestro modelo reproduce valores realistas del coeficiente de Gini. Nuestros resultados indican que, en los modelos de interacción económica, la topología de la red de interacciones juega un rol fundamental para la distribución de los recursos. Específicamente, la presencia de interacciones locales contribuye a una distribución más equitativa de riqueza.

5 Conclusiones

Hemos implementado un modelo de intercambio económico en el cual la ocurrencia de interacciones está restringida a agentes que se encuentren en un mismo estrato económico. A diferencia de trabajos previos, donde el umbral para la interacción es fijo, en el presente artículo el estrato económico está definido mediante un umbral u que mide la diferencia relativa de las riquezas de los agentes. Además, hemos investigado los casos en los que la dinámica de intercambio económico se encuentra definida sobre una red de interacción global (todos con todos) y sobre una red de interacción local (vecinos cercanos). Para el caso de interacción global, el coeficiente G aumenta rápidamente a valores irreales en comparación con los valores medidos para los países del mundo, mientras que, cuando se impone la interacción local, los valores de G son menores y cercanos a los valores de G reales. Por otro lado, hemos visto que G aumenta de manera constante cuando u aumenta. Este comportamiento de G no se observa si el umbral u es fijo. Para valores grandes de u y f se presenta una disminución del coeficiente G para ambos tipos de redes de interacción. Esto sugiere que una política de favorecer a los agentes con menos recursos en un sistema económico, acompañado de una libertad de interacción entre agentes en diferentes estratos, contribuye al surgimiento de una actividad económica alta y al logro de equidad en la distribución de riqueza en el sistema.

Agradecimientos

J.L. Herrera agradece el apoyo del Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico, Tecnológico y de las Ar-

tes de la Universidad de Los Andes, Mérida, mediante el proyecto I-1213-09-05-A y de la misión Ciencia del FONACIT.

Referencias

Albert, R., Barabási, A. L., 2002, Statistical mechanics of complex networks, *Review of Modern Physics*, Vol. 74, pp. 47-97.

Ausloos, M., Pekalski, A., 2007, Model of wealth and goods dynamics in a closed market, *Physica A*, Vol. 373, pp. 560-568.

Chakrabarti, B. K., Chakrabarti A., 2006 *Econophysics and Sociophysics*, Wiley-VCH, Berlin.

Chatterjee, A., Chakrabarti, B. K., 2007, Kinetic exchange model for income and wealth distributions, *Eur. Phys. J. B*, Vol. 60, pp. 135-149.

Coeficientes de Gini del mundo, 2007, <http://es.wikipedia.org/wiki/Coeficiente-de-Gini>.

Fecha de consulta: 18-12-2010.

Herrera J. L., Cosenza M. G., Tucci K., 2008, Modelo de intercambio económico en una sociedad estratificada con interacciones locales, *Revista Científica UNET*, Vol. 21, No. 1, pp. 8-14.

Laguna M. F., Risau-Gusman, S., Iglesias J. R., 2005, Economic exchanges in a stratified society: End of the middle class?, *Physica A*, Vol. 356, pp. 107-113.

Liljeros, F., Edling C., Amaral, L. A. N., Stanley, H. E., Aberg, Y., 2001, The web of Human Sexual Contacts, *Nature (London)*, Vol. 411, No. 21, pp. 908-909.

Yakovenko, V. M., 2009, en *Encyclopedia of Complexity and System Science*, Springer, Berlin.

Watts, D. J. y Strogatz, S. H., 1998. Collective dynamics of small-world networks, *Nature (London)*, Vol. 393, pp. 440-442.

Recibido: 10 de julio de 2011

Revisado: 15 de octubre de 2011

