

# Estructuras jerárquicas inducidas por estímulo externo en redes dinámicas coevolutivas

## Hierarchical structures induced by external input in coevolving dynamical networks

Márquez, Víctor<sup>1,\*</sup>; Cosenza, Mario G.<sup>1</sup> y Tucci, Kay<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Grupo de Caos y Sistemas Complejos,  
Centro de Física Fundamental;

<sup>2</sup>Laboratorio SUMA; Facultad de Ciencias,

<sup>3</sup>Centro de Simulación y Modelos,  
Facultad de Ingeniería,

Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela

\*victormarquez@ula.ve

### Resumen

*Se investiga una red coevolutiva de mapas acoplados, sujetos a un forzamiento, como un modelo simple de un sistema adaptativo de neuronas expuestas a un estímulo externo. Coevolución significa que la dinámica de los mapas produce cambios en la estructura de conectividad de la red, haciendo que la topología del sistema también varíe en el tiempo, lo cual a su vez afecta la dinámica local. La dinámica local es de tipo oscilatoria y caótica, descrita por el mapa del círculo. Se estudia la influencia de los parámetros del sistema, tales como la intensidad del estímulo externo, en la formación de estructuras y se caracteriza el comportamiento dinámico colectivo y las propiedades topológicas de la red emergente. Los resultados muestran que existen rangos de valores de la intensidad del estímulo para los cuales surgen estructuras jerárquicas en la red. Adicionalmente, se encuentra que el estímulo externo induce mayor estructura en la red cuando los estados de los mapas están menos sincronizados. Nuestro trabajo ilustra el potencial que tiene la aplicación de los modelos de mapas acoplados en el estudio de coevolución en sistemas complejos.*

**Palabras Clave:** Redes coevolutivas, modelos de dinámica neuronal, sincronización, adaptación.

### Abstract

*We investigate a coevolving network of coupled maps subject to a forcing as a simple model for an adaptive system of system of neurons reciving an external stimulus. Coevolution means that the dynamics of the maps modifies the connectivity structure of the underlying network, and that this structure in turn affects the dynamics, both varying in time. The local dynamics is chaotic and described by the circle map. The influence of the intensity of the external stimulus on the dynamical collective behavior and the topological properties of the network are studied. It is shown that there are ranges of the intensity of the stimulus for which hierarchical structures arise in the network. In addition, it is found that the stimulus induces more structure when the states of the maps are less synchronized. Our work illustrates the potential of coupled map models for studying coevolution in complex systems.*

**Keywords:** Coevolving networks, neuronal models, synchronization, adaptation

## 1 Introducción

En años recientes, el concepto de redes dinámicas ha surgido como un paradigma para el estudio de los sistemas complejos y ha permeado todos los ámbitos de la ciencia contemporánea (Boccaletti y col., 2006). Una gran variedad de sistemas naturales y artificiales, desde la ecología, la epidemiología, la socioeconomía, la internet y las ciencias computacionales hasta la neurociencia, se han podido investigar como redes dinámicas (Albert & Barabasi, 2002;

Dorogovtsev & Mendes, 2003; Newman, 2003). Estos sistemas están constituidos por elementos conectados formando una red y cuyos estados evolucionan en el tiempo. La evolución de los estados de los elementos puede depender tanto de su dinámica local como de la estructura de conexión entre ellos. Muchos de estos sistemas son coevolutivos, es decir, que la dinámica de los elementos constituyentes produce cambios en la estructura de conexión de la red, haciendo que la topología del sistema también varíe en el tiempo, lo cual a su vez afecta la dinámica local. En estos sistemas la dinámica

y la topología están acopladas y dependen la una de la otra. Actualmente, existe un gran interés en el estudio de sistemas coevolutivos en diferentes contextos (Gross & Blasius, 2008).

Los modelos de redes de mapas acoplados han sido ampliamente utilizados para el estudio de redes dinámicas (Kaneko & Tsuda, 2000). Las redes de mapas acoplados representan sistemas dinámicos espaciotemporales, donde tanto el espacio como el tiempo son discretos, pero los estados de los elementos interactivos son variables continuas. Estos modelos han demostrado ser capaces de describir una gran variedad de fenómenos observados en redes dinámicas, con la ventaja de ser computacionalmente muy eficientes. Sin embargo, su aplicación en el estudio de sistemas coevolutivos apenas ha comenzado en los últimos años.

Muchos sistemas no se encuentran totalmente aislados en la naturaleza y pueden ser afectados por agentes o estímulos externos al sistema, generando cambios en su estructura y en su dinámica. En este caso, hablamos de sistemas forzados, no autónomos. Por ejemplo, en el cerebro humano, a pesar de que se cree que la mayor parte de la estructura global de la corteza está genéticamente predeterminada, algunas partes son plásticas o adaptativas, y son capaces de organizarse dinámicamente de una manera que depende de estímulos externos (Kilgard & Merzenich, 1998). En tal sentido, resulta importante determinar si la información genética es indispensable para la formación de esta estructura, o si una estructura jerárquica puede emerger espontáneamente en la corteza cerebral a través de procesos dinámicos adaptativos.

En este artículo abordamos el estudio de sistemas coevolutivos sujetos a una fuerza o estímulo externo. Específicamente, consideramos una red coevolutiva de mapas acoplados sujetos a un forzamiento como un modelo simple de un sistema plástico de neuronas sujetas a un estímulo externo

Para nuestro estudio, nos basamos en un modelo propuesto por Ito y Kaneko (Ito & Kaneko, 2000) para el cambio adaptativo en las conexiones neuronales que conduce a una estructura dinámica jerárquica de una red bajo la influencia de un estímulo externo. En particular, estudiamos la influencia de los parámetros del sistema en la formación de estructuras y caracterizamos las propiedades topológicas de la red emergente. Nuestros resultados muestran que existen rangos de valores de parámetros, especialmente de la intensidad del estímulo, para los cuales surgen estructuras jerárquicas para el procesamiento de información en redes neuronales. En tal sentido, hemos encontrado que el estímulo externo es capaz de inducir estructura en la red.

## 2 Modelo de Ito y Kaneko

El modelo de Ito y Kaneko (Ito & Kaneko, 2000) corresponde al siguiente sistema coevolutivo de mapas acoplados,

$$x_{n+1}^i = x_n^i + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n^i) + \frac{c}{2\pi} \sum_{j=1}^N \epsilon_n^{ij} \sin(2\pi x_n^j) + I^i \quad (1)$$

$$\epsilon_{n+1}^{ij} = \frac{[1 + \delta \cos 2\pi(x_n^i - x_n^j)] \epsilon_n^{ij}}{\sum_{j=1}^N [1 + \delta \cos 2\pi(x_n^i - x_n^j)] \epsilon_n^{ij}}, \quad (2)$$

donde  $x_n^i$  es la fase o el estado de la unidad  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) en el tiempo discreto  $n$ , y  $N$  el número de unidades. La variable  $\epsilon_n^{ij}$  corresponde a la intensidad del acoplamiento desde la unidad  $j$  hacia la unidad  $i$  en el instante  $n$ ,  $I^i$  es el estímulo externo que se ejerce sobre la unidad  $i$ , y el parámetro  $c$  representa la intensidad de la influencia global del sistema sobre cada unidad. Debido al interés en estudiar unidades con dinámica oscilatoria y caótica, J. Ito y K. Kaneko proponen el mapa del círculo como dinámica local

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \pmod{1}, \quad (3)$$

donde  $\Omega$  es el parámetro que corresponde al número de rotación y  $k$  mide la intensidad de la no linealidad del mapa.

Los acoplamientos  $\epsilon_n^{ij}$  pueden representarse mediante una matriz  $N \times N$  no simétrica, que constituye la matriz de conectividad (también llamada matriz de adyacencia) del sistema. A diferencia de la mayoría de los sistemas dinámicos definidos en redes estáticas, en este modelo la matriz de conectividad cambia en el tiempo, a medida que cambian los estados de las unidades. Es decir, la dinámica del sistema y su topología de conectividad coevolucionan: el cambio de una afecta la otra y viceversa. Este tipo de sistemas se denominan coevolutivos o adaptativos.

Este sistema de ecuaciones requiere dar los valores iniciales  $x_0^i$  y la matriz de conectividad inicial  $\epsilon_0^{ij}$ . Los valores iniciales se distribuyen aleatoria y uniformemente, tal que  $x_0^i \in [0, 1]$ , mientras que a los acoplamientos iniciales se asignan valores idénticos  $\epsilon_0^{ij} = 1/N$ ,  $\forall i, j$ , de tal manera que la estructura de la red al comenzar la simulación corresponde a una red globalmente acoplada y simétrica.

## 3 Formación de estructuras por estímulo externo

En el presente trabajo nos proponemos a investigar el comportamiento de la estructura emergente en el modelo de Ito y Kaneko, en función de los parámetros del sistema. Es decir, estudiaremos la influencia del estímulo externo  $I$  en la formación de estructuras en la red de conectividad, y del valor umbral  $u$  en la visualización

de las mismas, tal que se define una conexión entre las unidades  $i$  y  $j$  si y sólo si  $\epsilon_{ij} > u$ .

Una cantidad importante para caracterizar las propiedades de conectividad de una red es el coeficiente de clustering (Dorogovtsev & Mendes, 2004), definido por

$$C = \langle C_i \rangle_i = \left\langle \frac{n_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)} \right\rangle_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)}, \quad (4)$$

donde  $N$  es el número de nodos en la red,  $k_i$  es el grado del nodo  $i$  y  $n_i$  es el número total de conexiones entre los vecinos de  $i$ .

La figura 1 muestra el coeficiente de clustering en función del parámetro  $I$  (independiente del tiempo) y de  $u$  para una red de tamaño  $N = 50$ , en el estado asintótico del sistema. En ella se aprecia que la mayor estructura emergente en la red, indicada por mayores valores del coeficiente  $C$ , ocurre para valores de umbral  $u$  pequeños. Por otro lado, se observa que los valores de  $C$  son aproximadamente simétricos con respecto al valor  $I = 0.5$ . Esto se debe a que los valores de los estados de los elementos de la red están definidos con módulo 1. En el intervalo  $I \in [0, 0.5]$  se observa un máximo en el coeficiente de clustering, alrededor de  $I = 0.25$ . Cabe notar que el valor fijo empleado por Ito y Kaneko en su artículo (Ito & Kaneko, 2000) corresponde a  $I = 0.2$ .

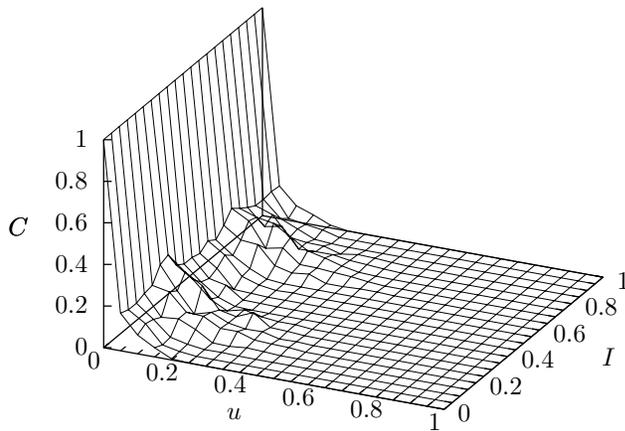


Fig. 1. Coeficiente de clustering promediado sobre 1000 iteraciones, despreciando un transiente de 50000 iteraciones, en función del valor de umbral  $u$  y del parámetro de la intensidad del estímulo externo  $I$ . Parámetros fijos:  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $N = 50$ .

La figura 2 (a) muestra el coeficiente de clustering como función de  $I$ , para un valor fijo de umbral  $u = 0.1$ . Se nota la existencia de un rango intermedio de valores de  $I$  alrededor de 0.25 (0.75), para el cual el coeficiente de clustering  $C$  alcanza valores máximos. Es decir, que intensidades muy bajas o muy altas del estímulo externo no inducen mayor estructura en la red.

Para investigar las propiedades dinámicas colectivas de los mapas en la red, calculamos el grado de sincronización de los mismos en función de la intensidad del

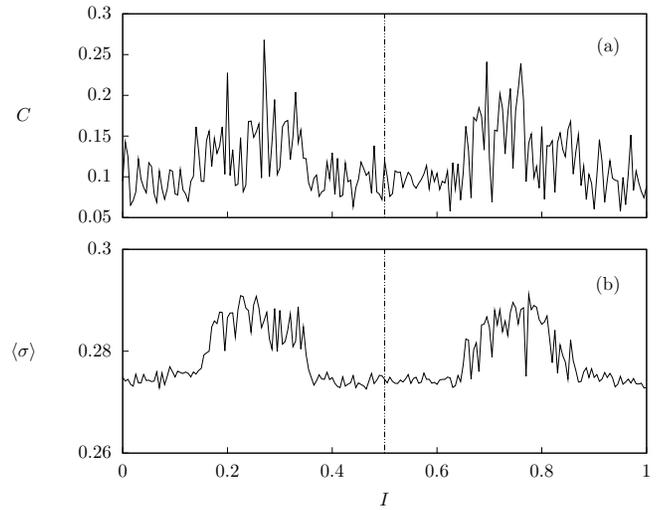


Fig. 2. (a) Promedio del coeficiente de clustering  $C$  y (b) promedio asintótico de la desviación estándar  $\langle \sigma \rangle$ , como función del estímulo externo  $I$ , calculados sobre 1000 iteraciones, luego de un transiente de 50000 iteraciones. Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $u = 0.1$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$ .

estímulo externo. Para tal fin se puede calcular la dispersión o desviación estándar instantánea de los estados de los mapas en la red, definida como

$$\sigma_n = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_n^i - \langle x_n \rangle)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

donde  $\langle x_n \rangle$  es la media instantánea de los valores  $x_n^i$ ,  $\forall i$ . La sincronización se puede caracterizar por el promedio asintótico  $\langle \sigma \rangle$  de los valores  $\sigma_n$ , después de descartar un número de transientes. Un estado sincronizado estable corresponde a un valor  $\langle \sigma \rangle = 0$ . Luego, valores de  $\langle \sigma \rangle$  pequeños indican un grado mayor de sincronización con respecto a valores grandes de  $\langle \sigma \rangle$ .

La figura 2 (b) muestra la cantidad  $\langle \sigma \rangle$  en función de la intensidad del estímulo externo  $I$ , para un valor fijo de umbral  $u = 0.1$ . Se observa que los estados de los mapas en la red presentan mayor desincronización justamente en el intervalo de  $I$  para el cual emerge mayor estructura en la red, como se observa en la figura 2 (a). Es decir, que el estímulo externo induce mayor estructura en la red adaptativa cuando los estados de los mapas están más dispersos. Note que esta región concuerda con el rango de valores donde se observan los estados desincronizados del sistema en ausencia de estímulo externo, como se muestra en la figura 2 (b).

Este es uno de los resultados más importantes del presente trabajo: la presencia de estructuras en una red no está asociada a la sincronización de los estados de sus elementos. Este resultado tiene implicaciones importantes en cuanto al procesamiento de información en el sistema

nervioso. En particular, estudios experimentales recientes muestran que la desincronización en algunas áreas del cerebro, están positivamente correlacionadas con el funcionamiento de la memoria de largo plazo, mientras que estados sincronizados se relacionan con la habilidad de codificar nueva información (Zhuan y col., 2009).

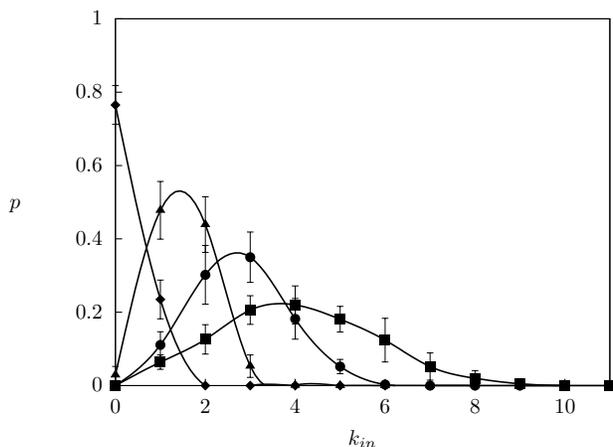


Fig. 3. Distribución de probabilidad de conexiones entrantes  $k_{in}$  para distintos valores de umbral, ■ para  $u = 0.05$ , ● para  $u = 0.10$ , ▲ para  $u = 0.20$ , ◆ para  $u = 0.60$ . Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $I = 0.2$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$ .

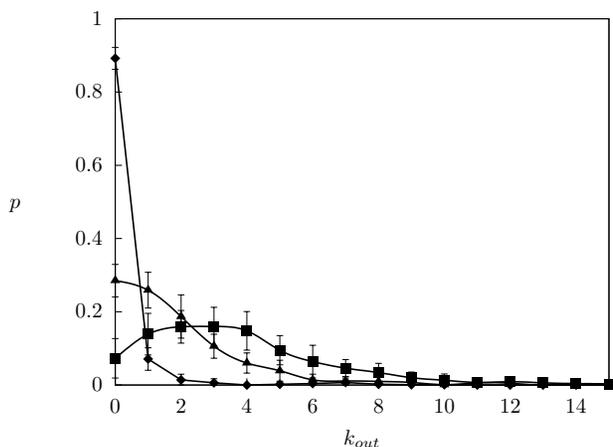


Fig. 4. Distribución de probabilidad de conexiones salientes  $k_{out}$  para distintos valores de umbral, ■ para  $u = 0.05$ , ▲ para  $u = 0.15$ , ◆ para  $u = 0.60$ . Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $I = 0.2$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$ .

Con el fin de estudiar las propiedades topológicas de la estructura emergente inducida por el estímulo externo, calculamos la distribución de probabilidad del total de conexiones salientes y entrantes de los nodos de la red,  $k_{in}$  y  $k_{out}$  respectivamente. La figura 3 muestra la distribución de probabilidad de  $k_{in}$  para distintos valores de umbral  $u$ , mientras que la figura 4 muestra la distri-

bución de probabilidad de  $k_{out}$  para distintos valores de  $u$ . Note que en ambos casos las distribuciones de probabilidad cambian su forma, de tipo gaussiana a tipo ley de potencia, a medida que aumenta el valor del umbral  $u$ . Esto indica que para valores de umbrales pequeños la conectividad de la red es más uniforme. En ambos casos para  $u = 0$  la red está globalmente acoplada, mientras que para  $u = 1$  la red está desconectada.

Las figuras 5 y 6 muestran las distribuciones de probabilidad de  $k_{in}$  y de  $k_{out}$ , respectivamente, para distintos valores de la intensidad del estímulo externo  $I$ . Note otra vez la simetría con respecto al valor de  $I = 0.5$ . Note que la distribución de probabilidad de conexiones entrantes  $k_{in}$  es de tipo gaussiana, con un valor medio aproximado de  $k_{in} = 3$ . Por otro lado, la distribución de probabilidad de  $k_{out}$  posee una cola más larga para valores grandes del número de conexiones salientes.

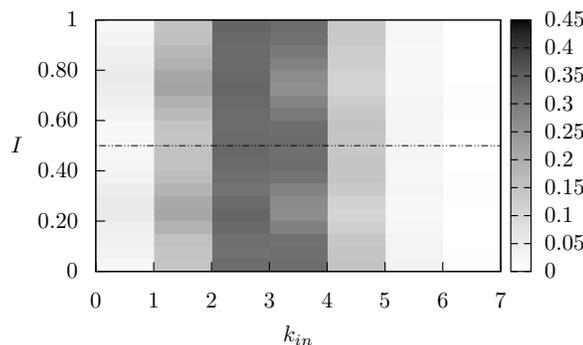
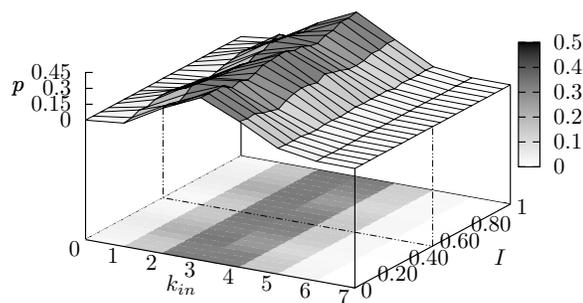


Fig. 5. Distribución de probabilidad de conexiones entrantes  $k_{in}$  para distintos valores de la intensidad del estímulo externo  $I$ . Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $u = 0.1$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$ .

Finalmente, la figura 7 muestra el número de vértices por capa, para distintos valores de la intensidad del estímulo  $I$ . Aquí también se observa la simetría con respecto al valor  $I = 0.5$ . Resalta el hecho de que el mayor número de vértices concentrados en pocas capas ocurre en el mismo intervalo de intensidad del estímulo alrededor de  $I = 0.25$  ( $I = 0.75$ ), para el cual se produce el mayor valor de coeficiente de clustering y la menor sincronización de los estados de los vértices. Valores de intensidad del estímulo fuera de este rango inducen un mayor número de capas en la red, con un menor

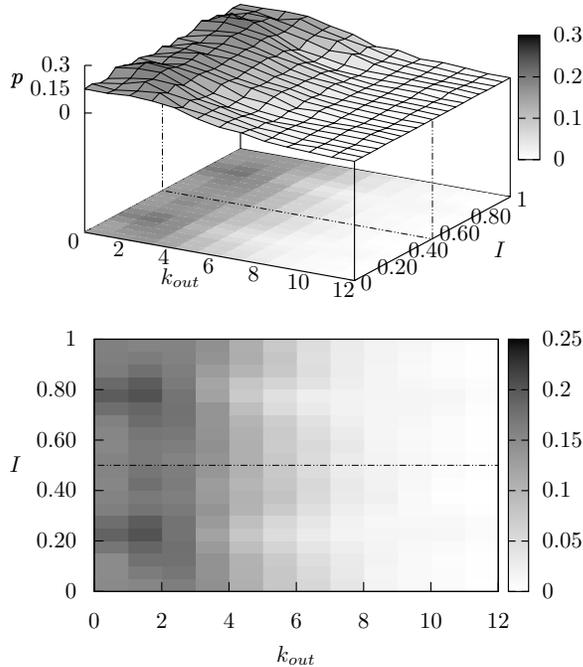


Fig. 6. Distribución de probabilidad de conexiones saliente  $k_{out}$  para distintos valores de la intensidad del estímulo externo  $I$ . Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $u = 0.1$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$

número de nodos en cada una. Las redes neuronales artificiales pueden tener cualquier número de capas, y cualquier número de nodos por capas, pero en la gran mayoría de sus aplicaciones, utilizan estructuras de tres capas con una capa (saliente) que posee un solo nodo (Smith, 1997). La presencia del estímulo externo en la red es fundamental si se desea generar una estructura jerárquica de capas similar a la utilizada por las redes neuronales artificiales en algunas de sus aplicaciones.

#### 4 Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado una red coevolutiva de mapas acoplados sujetos a un forzamiento, como un modelo simple de un sistema adaptativo de neuronas expuestas a un estímulo externo. Este tipo de modelo tiene mucha relevancia en la investigación de los procesos cognoscitivos como la memoria y el procesamiento de información en el cerebro.

Nuestro estudio se ha basado en un modelo propuesto por Ito y Kaneko (Ito & Kaneko, 2000) para el cambio adaptativo en las conexiones neuronales, que conduce a una estructura dinámica jerárquica de una red bajo la influencia de un estímulo externo. En particular, hemos investigado la influencia del parámetro de la intensidad del estímulo externo  $I$  del sistema en la formación de estructuras, y el umbral de conectividad  $u$  en la visualización de las mismas, y hemos caracterizado el comporta-

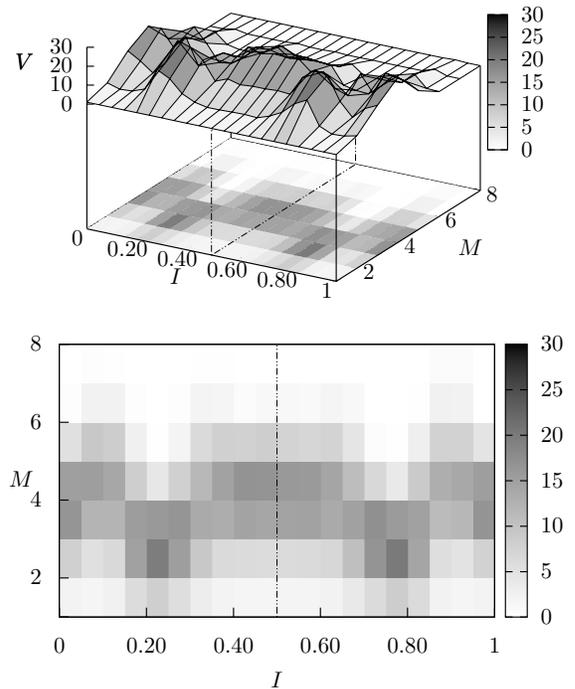


Fig. 7. Promedio de número de nodos  $V$  presentes en distintas capas  $M$  que se forman, para distintos valores de  $I$ , calculado sobre 1000 iteraciones, luego de un transiente de 50000 iteraciones. Los valores de  $V$  se indican por el código de colores mostrados a la derecha de las figuras. Parámetros fijos  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $u = 0.1$ , en un sistema de tamaño  $N = 50$ .

miento dinámico colectivo y las propiedades topológicas de la red emergente.

Nuestros resultados muestran que existen rangos de valores de parámetros, especialmente de la intensidad del estímulo, para los cuales surgen estructuras jerárquicas para el procesamiento de información en redes neuronales. Adicionalmente, hemos encontrado que el estímulo externo induce mayor estructura en la red adaptativa cuando los estados de los mapas están más dispersos. Es decir, la presencia de estructuras en una red no está asociada a la sincronización de los estados de sus elementos. Este es uno de los resultados más importantes del presente trabajo. Este resultado tiene implicaciones importantes en cuanto al procesamiento de información en el sistema nervioso. Estudios experimentales recientes muestran que la desincronización en algunas áreas del cerebro, están positivamente correlacionadas con el funcionamiento de la memoria de largo plazo, mientras que estados sincronizados se relacionan con la habilidad de codificar nueva información (Zhuan y col., 2009).

Por otro lado, hemos hallado que la mayor estructura emergente en la red, indicada por mayores valores del coeficiente de clustering  $C$ , se puede visualizar mejor con valores de umbral  $u$  pequeños. Hemos calculado las distribuciones de probabilidad de enlaces entrantes

$k_{in}$  y de enlaces salientes  $k_{out}$  para distintos valores de umbral  $u$ , encontrando que estas distribuciones cambian su forma, de tipo gaussiana a tipo ley de potencia, a medida que aumenta el valor de  $u$ . Esto sugiere que, para valores de umbrales pequeños, la conectividad que se muestra en la red es más uniforme con una mayor concentración de nodos en pocas capas.

Hemos mostrado que la presencia del estímulo externo en la red, en el mismo intervalo de valores de  $I$  donde se produce el mayor valor de coeficiente de clustering y la menor sincronización de los estados de los vértices, es fundamental para generar una estructura jerárquica de capas, con un mayor número de vértices concentrados en pocas capas. Esta estructura se asemeja a la utilizada para ciertas aplicaciones de redes neuronales artificiales (Smith, 1997).

Finalmente, la presente investigación demuestra el gran potencial que tiene la aplicación de los modelos de mapas acoplados en el estudio de sistemas complejos coevolutivos. Nuestro trabajo muestra que un modelo simple, con ingredientes mínimos, es capaz de capturar al menos la fenomenología de un sistema de neuronas, incluyendo su plasticidad y su estructura jerárquica.

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido apoyado por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico, Tecnológico y de las Artes de la Universidad de Los Andes, en Mérida, Venezuela, mediante el proyecto No. C-1692-10-05-B.

### Referencias

Albert R y Barabasi A, 2002, Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 74, No. 1, pp. 1-54.  
 Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M y Hwang

DU, 2006, *Physics Reports*, Vol. 424, No. 4-5, pp. 175-308.

Dorogovtsev S y Mendes J, 2003, *Evolution of networks*, UK: Oxford University Press, Oxford.

Dorogovtsev S y Mendes J, 2004, The shortest path to complex networks, arXiv:cond-mat/0404593v4 [cond-mat.stat-mech].

Gross T y Blasius B, 2008, Adaptive coevolutionary networks: a review, *J. R. Soc. Interface*, Vol. 5, No. 20, pp. 259-271

Ito J y Kaneko K, 2000, Self-organized hierarchical structure in a plastic network of chaotic units, *Neural Networks*, Vol. 13, No. 3, pp. 275-281.

Kaneko K y Tsuda I, 2000, *Complex Systems: Chaos and Beyond*, Springer.

Kilgard M y Merzenich M, 1998, Plasticity of temporal information processing in the primary auditory cortex, *Nature Neuroscience*, Vol. 1, No. 8, pp. 727-731.

Newman M, 2003, The structure and function of complex networks, *SIAM Rev.*, Vol. 45, No. 2, pp. 167-256.

Smith S, 1997, Chapter 26 - Neural Networks (and more!), *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Pub.

Tsodyks M y Markram H, 1997, The neural code between neocortical pyramidal neurons depends on neurotransmitter release probability, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 94, pp. 719-723.

Zhuang T, Zhao H y Tang Z, 2009, An Analysis of Improving Memory Performance Based on EEG Alpha and Theta Oscillations, *Computer and Information Science*, Vol. 2, pp. 109-114.

**Recibido:** 26 de abril de 2011

**Revisado:** 20 de julio de 2011