

# Comportamientos colectivos inducidos por diversidad en sistemas dinámicos espaciotemporales

## Collective behaviors induced by diversity in spatiotemporal dynamical systems

Valdéz, Andrea\* y Cosenza, Mario G.

Centro de Física Fundamental,  
Grupo de Caos y Sistemas Complejos,  
Universidad de Los Andes,  
Mérida 5101, Venezuela.

\*andreav@ula.ve

### Resumen

*Investigamos los efectos inducidos por distintas fuentes de heterogeneidad en el comportamiento colectivo de un sistema dinámico espaciotemporal. Consideramos una red de mapas caóticos globalmente acoplados como un modelo con ingredientes mínimos que permite caracterizar la heterogeneidad de manera simple. Se estudia la heterogeneidad en la intensidad de los acoplamientos y en el grado de no linealidad de los mapas. Se investiga el surgimiento de diversos comportamientos colectivos no triviales, como la evolución del campo medio, en función del ancho de la dispersión de distintos parámetros del sistema. También se investiga el efecto de la heterogeneidad variable en el tiempo. Los resultados muestran que la diversidad en los parámetros puede inducir orden macroscópico en coexistencia con caos local en sistemas dinámicos espaciotemporales.*

**Palabras Clave:** Sistemas dinámicos, heterogeneidad, comportamiento colectivo, redes de mapas acoplados.

### Abstract

*We investigate the effects induced by different sources of heterogeneity in the collective behavior of spatiotemporal dynamical systems. We consider a network of globally coupled chaotic maps as a model with minimum ingredients that allows the characterization of heterogeneity in a simple way. The influence of heterogeneity in the intensity of couplings and in the degree of nonlinearity of the local maps is investigated. We study the emergence of nontrivial collective behavior, characterized by the evolution of the mean field, as a function of the width of the dispersion of various parameters of the system. We also investigate the effects of time-varying heterogeneity. The results show that diversity in the parameters can induce macroscopic order coexisting with local chaos in spatiotemporal dynamical systems.*

**Keywords:** Spatiotemporal dynamical systems, heterogeneity, collective behavior, coupled map lattices.

### 1 Introducción.

Muchos sistemas en la Naturaleza sujetos a interacciones globales presentan comportamientos colectivos que no son susceptibles de ser derivados trivialmente a partir del conocimiento del comportamiento de los elementos constituyentes aislados. Por ejemplo, fenómenos que aparecen naturalmente en sistemas físicos, químicos, biológicos y sociales; tales como ondas de densidad de carga, osciladores químicos, en redes de uniones Josephson, en la dinámica neuronal y celular, en la autoorganización de individuos de una misma sociedad con determinadas condiciones, entre otros, exhiben comportamientos colectivos organizados.

En la mayoría de los estudios sobre estos sistemas se ha asumido homogeneidad, en el sentido de que la dinámica de los elementos y las interacciones entre ellos son idénticas (Kaneko, 1992). Desde hace un poco más de una década, se empezó a estudiar el comportamiento colectivo que surge al introducir diversidad en los sistemas, que es lo que conocemos como heterogeneidad (Shibata y Kaneko, 1997). La importancia de introducir heterogeneidad en sistemas dinámicos radica en que este fenómeno es muy común; es decir, los elementos que constituyen dichos sistemas no son idénticos en general. En las redes de uniones Josephson cada unidad es diferente, lo mismo pasa con las células y las neuronas, de igual forma sucede con los sistemas sociales donde

cada individuo es distinto y/o también cada elemento del sistema puede tener diferente manera de interactuar con el resto. De esta manera, encontramos diversidad en una gran variedad de contextos. De aquí la importancia de estudiar el comportamiento colectivo inducido por diversidad en redes de elementos dinámicos.

En este trabajo, la heterogeneidad es el ingrediente que agregaremos para generar diversidad en redes dinámicas acopladas globalmente, por ser éstas una clase importante de sistemas que manifiestan efectos colectivos ordenados o comportamientos colectivos no triviales. Un primer estudio de la heterogeneidad en mapas singulares fue realizado por (González, 2001). Nuestro objetivo es investigar diversas fuentes de heterogeneidad en esta clase de mapas, tanto en el exponente de singularidad como en la conectividad de los elementos, y su influencia en el surgimiento de comportamientos colectivos. Éste tipo de comportamientos fueron hallados y analizados en mapas logarítmicos por (Cosenza y González, 1998). Adicionalmente, nos proponemos estudiar el efecto de heterogeneidad variable en el tiempo de los parámetros locales de estos mapas.

## 2 Modelo con acoplamiento heterogéneo.

Consideramos un sistema con acoplamiento heterogéneo de una red de mapas acoplados globalmente (RMAG) (Kaneko, 1994), definido por:

$$x_{t+1}(i) = (1 - \epsilon(i))f(x_t(i)) + \frac{\epsilon(i)}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j)), \quad (1)$$

donde  $x_t(i)$  representa el estado del elemento  $i$ -ésimo de la red en el tiempo discreto  $t$ ,  $\epsilon(i)$  es el parámetro de acoplamiento correspondiente al elemento  $i$ ,  $N$  el número de elementos de la red y  $f(x_t(i))$  describe la dinámica interna de cada elemento (dinámica local). La interacción global viene dada por el campo medio del sistema, que se define como:

$$h_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j)). \quad (2)$$

La dinámica local de los elementos se describe mediante los mapas singulares, que en este caso son homogéneos (con idénticos parámetros), cuya forma funcional es:

$$f(x_t(i)) = b - |x_t(i)|^z, \quad (3)$$

con  $|z| < 1$ . Los valores  $b$  y  $z$  que consideraremos se toman en el rango de las regiones caóticas.

Los mapas singulares constituyen un escenario de caos robusto, introducido por (Alvarez y Cosenza, 2007), como una manera muy sencilla de encontrar caos robusto en una región bien definida de sus parámetros  $b$  y  $z$ .

### 2.1 Influencia del ancho de la heterogeneidad en los acoplamientos.

Con el objetivo de estudiar el efecto de la heterogeneidad en el comportamiento de redes dinámicas, realizamos un análisis del campo medio del sistema  $h_t$  como una función del ancho del intervalo en la distribución de los parámetros de acoplamiento del sistema; de esta manera caracterizaremos los estados colectivos en función de  $\Delta\epsilon$ .

La distribución de los parámetros  $\epsilon(i)$  se realiza de la siguiente manera:

$$\epsilon(i) = \epsilon_{min} + \Delta\epsilon \cdot \gamma \quad (\Delta\epsilon \in [0, \epsilon_{max} - \epsilon_{min}]), \quad (4)$$

siendo  $\epsilon_{max}$  y  $\epsilon_{min}$  los valores máximo y mínimo de la distribución de la heterogeneidad del  $\epsilon$ , respectivamente, y  $\gamma$  es una función que genera números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$ . De esta manera, se puede notar que para  $\Delta\epsilon = 0$  se tendrá una distribución homogénea del parámetro de acoplamiento, es decir,  $\epsilon(i) = \epsilon_{min}, \forall i$ , y por otra parte, cuando  $\Delta\epsilon = \epsilon_{max} - \epsilon_{min}$ , se tendrá el caso de la heterogeneidad distribuida en todo el ancho del intervalo  $\epsilon \in [\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$  en estudio.

## 3 Modelo con exponente de singularidad heterogéneo.

En este caso, estudiamos la influencia del grado de heterogeneidad (o el ancho del intervalo en la distribución de la heterogeneidad) en el exponente de singularidad de los mapas singulares,  $\Delta z$ , en función del campo medio de una RMAG,  $h_t$ . De la misma manera que en la sección 2.2.1, realizamos la distribución de los exponentes como sigue:

$$z(i) = z_{min} + \Delta z \cdot \gamma \quad (\Delta z \in [0, z_{max} - z_{min}]), \quad (5)$$

donde nuevamente,  $\gamma$  es una función que genera números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$ , y los valores de  $z_{max}$  y  $z_{min}$  son elegidos para determinado valor del parámetro local  $b$  fijo, de manera que los  $z(i)$  pertenezcan a un rango bien definido de caos robusto y con un parámetro de acoplamiento  $\epsilon$ , fijo. De manera que la dinámica local del sistema de la RMAG sea completamente caótica y así poder observar la emergencia de comportamientos colectivos no triviales.

## 4 Modelo con heterogeneidad variable en el parámetro local.

Consideramos nuevamente la expresión para una RMAG (ec.(1)), pero esta vez los parámetros de acoplamiento  $\epsilon$ , son idénticos para todos los elementos de la red, y la heterogeneidad es distribuida en la dinámica

local de los mapas singulares  $f_i(x_t(i))$ , que en este caso la definimos como sigue:

$$f_i(x_t(i)) = b_t(i) - |x_t|^z, \quad (6)$$

donde los parámetros  $b_t(i)$  se distribuyen aleatoriamente de manera uniforme en cada iteración  $t$ , en un intervalo correspondiente a la región de caos robusto, con exponente  $z$  fijo. El estudio se realiza sobre el campo medio del sistema como una función del parámetro de acoplamiento de la RMAG. Esta heterogeneidad variable en el tiempo se puede asociar con un ruido interno (ruido local).

## 5 Resultados

### 5.1 Acoplamiento heterogéneo de una RMAG

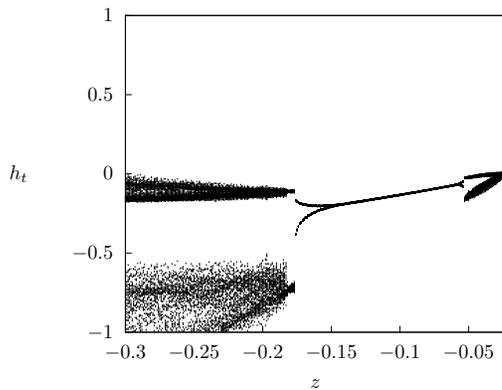


Fig. 1. Diagrama de bifurcación del campo medio  $h_t$  en función del exponente de singularidad  $z$  con  $\epsilon(i) \in [-0.5, 2.5]$ , con  $b = 1.11$  y el tamaño del sistema  $N = 10^5$ . Para cada valor de  $z$ , se desprecian las primeras 3000 iteraciones y se grafican las siguientes 100. Esta figura corresponde al modelo de la sección 2 de este artículo.

Los parámetros de acoplamiento se distribuyen con probabilidad uniforme, en el intervalo que se muestra en la leyenda de la Fig. 1, a manera de cubrir un amplio rango de valores de acoplamiento. Escogimos un valor fijo de  $b$  y un rango de los exponentes  $z$  dentro de la región de caos robusto de los mapas singulares, de manera que la aparición de orden colectivo no se puede atribuir a la existencia de orden subyacente en la dinámica local del sistema.

En esta figura se observan los siguientes comportamientos emergentes:

- Bandas caóticas de períodos:
  1. dos para  $z \in [-0.3, -0.177]$
  2. dos para  $z \in [-0.053, -0.032]$
  3. uno para  $z \in [-0.031, -0.023]$
- Comportamientos colectivos de períodos:

1. dos para  $z \in [-0.176, -0.151]$
2. dos para  $z \in [-0.057, -0.054]$
3. uno (turbulencia) para  $z \in [-0.150, -0.058]$

### 5.2 Influencia de la heterogeneidad en los acoplamientos de una RMAG

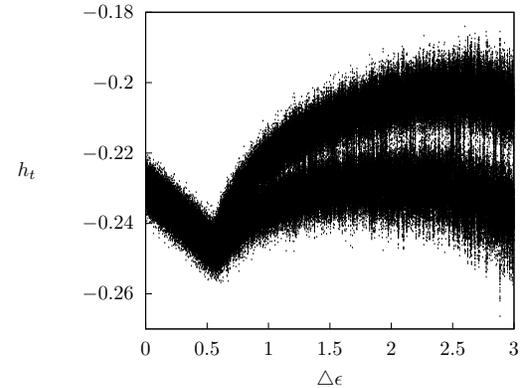


Fig. 2. Campo medio  $h_t$  en función del tamaño de la distribución de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento  $\Delta\epsilon$ . Con  $b = 1.11$  y  $z = -0.16$ . Donde la distribución de los parámetros  $\epsilon(i)$ , para cada valor de  $\Delta\epsilon$ , se realiza como se muestra en la ecuación(4). Y el intervalo de distribución de la heterogeneidad es  $\epsilon \in [-0.5, 2.5]$ .

En la Fig. 2 se muestra el comportamiento del campo medio  $h_t$ , que resulta al variar el ancho del intervalo de heterogeneidad  $\Delta\epsilon$  para los valores de parámetros  $b$  y  $z$  fijos.

De manera que observamos para  $\Delta\epsilon = 0$  el comportamiento del campo medio para el caso homogéneo, donde  $\epsilon(i) = \epsilon_{min} = -0.5 \forall i$ , se muestra un comportamiento de turbulencia global en promedio, pues parece ser una banda caótica de período uno, pero el ancho de la banda se puede reducir hasta llegar a ser un punto fijo al aumentar el número de elementos  $N$ .

Para  $\Delta\epsilon = 3$  el comportamiento corresponde al caso de heterogeneidad mostrado en la Fig. 1 para el valor del exponente  $z = -0.16$ , pues la distribución de los  $\epsilon(i) \in [-0.5, 2.5]$ , donde se observa la correspondencia con el comportamiento colectivo de período dos.

Este resultado muestra la aparición de un comportamiento colectivo no trivial con el incremento de la heterogeneidad del sistema, que en este caso es la heterogeneidad de los parámetros de acoplamiento.

### 5.3 Heterogeneidad en el exponente de singularidad de una RMAG

Los valores  $z(i)$  en la gráfica de la Fig. 3 están dados por la ecuación (5), donde  $z_{min} = 0.085$  y  $z_{max} = 0.9$ , y los parámetros  $b$  y  $\epsilon$  están fijados. De manera que para  $\Delta z = 0$  se tiene el caso homogéneo, donde los  $z(i) = z_{min} = 0.085 \forall i$ . Mientras que en  $\Delta z = 0.9$

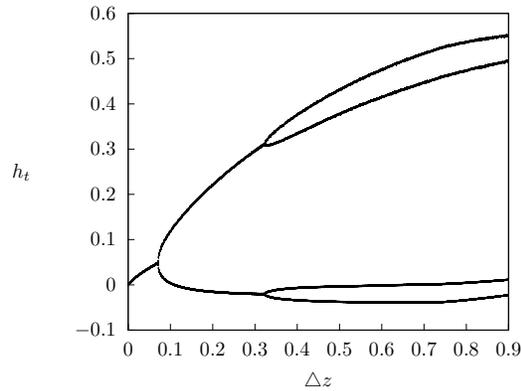


Fig. 3. Campo medio  $h_t$  en función del ancho de la distribución de la heterogeneidad en el exponente de singularidad,  $\Delta z$ . Con parámetro local y de acoplamiento fijos en  $b = 0.735$  y  $\epsilon = 0.2$ .

se tiene el caso de distribución en el mayor intervalo de heterogeneidad, donde los  $z(i) \in [0.085, 0.9]$ .

Se observa la presencia de:

- Turbulencia global para  $\Delta z \in [0, 0.069]$
- Comportamientos colectivos de períodos:
  1. dos para  $\Delta z \in [0.070, 0.325]$
  2. cuatro para  $\Delta z \in [0.326, 0.9]$

De esta manera se demuestra la aparición de comportamientos colectivos no triviales, no presentes en la dinámica local de los mapas singulares.

#### 5.4 Heterogeneidad variable en los parámetros locales de una RMAG

El siguiente resultado, mostrado en la Fig. 4, corresponde al modelo de la sección 4, donde los parámetros  $b$  y  $z$  fueron escogidos dentro del rango de caos robusto de los mapas singulares y se estudia el campo medio ( $h_t$ ) como una función del parámetro de acoplamiento ( $\epsilon$ ).

En la Fig. 4 se observan los siguientes comportamientos colectivos no triviales:

- Bandas caóticas de períodos:
  1. cuatro para  $\epsilon \in [0.777, 0.789]$
  2. cuatro para  $\epsilon \in [1.204, 1.218]$
- Comportamientos colectivos de períodos:
  1. dos para  $\epsilon \in [0.414, 0.701]$
  2. cuatro para  $\epsilon \in [0.702, 0.755]$
  3. ocho para  $\epsilon \in [0.756, 0.776]$
  4. seis para  $\epsilon = 0.822$
  5. ocho para  $\epsilon \in [1.219, 1.242]$
  6. seis para  $\epsilon = 1.179$

7. cuatro para  $\epsilon \in [1.243, 1.294]$

8. dos para  $\epsilon \in [1.295, 1.557]$

- Turbulencia global para:

1.  $\epsilon \in [0, 0.413]$

2.  $\epsilon \in [1.558, 2]$

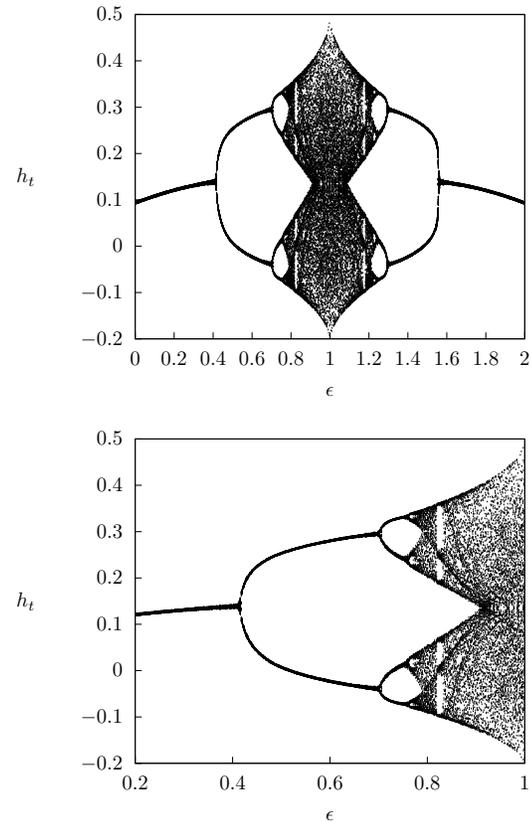


Fig. 4. Panel superior: diagrama de bifurcación del campo medio  $h_t$  en función del parámetro de acoplamiento  $\epsilon$ , en el caso de distribución variable de la heterogeneidad en el parámetro local  $b_t(i) \in [0.250, 0.750]$ , con el exponente de singularidad fijo en  $z = 0.5$  y  $N = 10^5$  celdas. Panel inferior: magnificación del diagrama de bifurcación de la figura de arriba en el rango de valores del acoplamiento  $\epsilon \in [0.2, 1]$ .

La Fig. 4 constituye uno de los resultados más notables de este trabajo, puesto que demuestra que la variabilidad temporal de los parámetros locales distribuidos induce comportamientos colectivos ordenados en una red dinámica.

## 6 Conclusiones

En este trabajo, hemos estudiado el efecto de la heterogeneidad en el surgimiento de comportamientos colectivos de redes dinámicas. Nos hemos enfocado en una clase importante de sistemas que manifiestan efectos colectivos no triviales, modelados mediante redes de mapas caóticos acoplados globalmente. Como fuente de caos

local hemos considerado la familia de mapas singulares  $f(x_t) = b - |x_t|^z$ , que presentan caos robusto en un rango definido de sus parámetros  $b$  y  $z$ .

Hemos escogido esta familia de mapas para representar la dinámica local porque la presencia de caos robusto asegura la operación confiable de un sistema en el régimen caótico. En particular, la emergencia de comportamientos colectivos ordenados en sistemas que poseen caos robusto en sus elementos, no es susceptible de ser atribuida a la presencia de ventanas periódicas en la dinámica local. Cualquier comportamiento emergente debe ser producto de las interacciones, lo cual es una propiedad característica de los sistemas complejos.

Nuestros resultados muestran que la heterogeneidad en los acoplamientos entre los mapas inducen comportamientos colectivos ordenados (Figs. 1 y 2). Estos resultados son relevantes en el contexto de sistemas sociales y biológicos, donde la diversidad en la intensidad de las interacciones entre los elementos es un hecho común, que coexiste con el fenómeno de coherencia y de consenso.

Encontramos que la heterogeneidad en los exponentes de singularidad  $z$  es capaz de inducir comportamientos colectivos periódicos no presentes en la dinámica local de los mapas (Fig. 3).

En el estudio de la heterogeneidad local variable, hallamos comportamientos colectivos emergentes que demuestran que, la variabilidad temporal de los parámetros locales distribuidos, induce comportamientos colectivos ordenados en una red dinámica (Fig. 4). La heterogeneidad variable es un fenómeno que se puede encontrar en sistemas sociales. Nuestro resultado sugiere que a pesar de las variaciones individuales, es posible alcanzar estados con cierto grado apreciable de consenso social.

La heterogeneidad en los parámetros de un sistema puede relacionarse, de cierta forma con la presencia de alguna fuente de ruido. Se sabe (Kaneko et al., 1999) que la inclusión de ruido en sistemas dinámicos puede favorecer la aparición de sincronización. Los resultados

de esta trabajo muestran que, la heterogeneidad, además de ayudar a la sincronización, es capaz de inducir comportamientos colectivos ordenados en un sistema dinámico.

### Agradecimientos.

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo del Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico, Tecnológico y de las Artes de la Universidad de Los Andes, en Mérida, Venezuela, mediante el proyecto No. C-1692-10-05-B.

### Referencias

- Alvarez-Llamoza O y Cosenza M G, 2007, Chaotic singular maps, CIENCIA, Vol. 15, No. 4, pp. 438 - 443.
- Cosenza M G y González J, 1998, Synchronization and collective behavior in globally coupled logarithmic maps, Prog. Theor. Phys. Vol. 100, No. 1, pp. 21-38.
- González Estévez J, 2001, Tesis de Maestría, Postgrado en Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.
- Kaneko K, 1992, Focus issue on coupled map lattices, Chaos, Vol. 2, No. 3, pp. 279-407.
- Kaneko K, 1994, Relevance of clustering to biological networks, Physica D., Vol. 75, pp. 55-73.
- Shibata T, Chawanya T y Kaneko K, 1999, Noiseless collective motion out of noisy chaos, Phys. Rev. Lett., Vol. 82, No. 22, pp. 4424-4427.
- Shibata T y Kaneko K, 1997, Heterogeneity induced order in globally coupled chaotic systems, Europhys. Lett., Vol. 38, No. 6, pp. 417-422.

**Recibido:** 15 de julio de 2011

**Revisado:** 20 de octubre de 2011

local hemos considerado la familia de mapas singulares  $f(x_t) = b - |x_t|^z$ , que presentan caos robusto en un rango definido de sus parámetros  $b$  y  $z$ .

Hemos escogido esta familia de mapas para representar la dinámica local porque la presencia de caos robusto asegura la operación confiable de un sistema en el régimen caótico. En particular, la emergencia de comportamientos colectivos ordenados en sistemas que poseen caos robusto en sus elementos, no es susceptible de ser atribuida a la presencia de ventanas periódicas en la dinámica local. Cualquier comportamiento emergente debe ser producto de las interacciones, lo cual es una propiedad característica de los sistemas complejos.

Nuestros resultados muestran que la heterogeneidad en los acoplamientos entre los mapas inducen comportamientos colectivos ordenados (Figs. 1 y 2). Estos resultados son relevantes en el contexto de sistemas sociales y biológicos, donde la diversidad en la intensidad de las interacciones entre los elementos es un hecho común, que coexiste con el fenómeno de coherencia y de consenso.

Encontramos que la heterogeneidad en los exponentes de singularidad  $z$  es capaz de inducir comportamientos colectivos periódicos no presentes en la dinámica local de los mapas (Fig. 3).

En el estudio de la heterogeneidad local variable, hallamos comportamientos colectivos emergentes que demuestran que, la variabilidad temporal de los parámetros locales distribuidos, induce comportamientos colectivos ordenados en una red dinámica (Fig. 4). La heterogeneidad variable es un fenómeno que se puede encontrar en sistemas sociales. Nuestro resultado sugiere que a pesar de las variaciones individuales, es posible alcanzar estados con cierto grado apreciable de consenso social.

La heterogeneidad en los parámetros de un sistema puede relacionarse, de cierta forma con la presencia de alguna fuente de ruido. Se sabe (Kaneko et al., 1999) que la inclusión de ruido en sistemas dinámicos puede favorecer la aparición de sincronización. Los resultados

de esta trabajo muestran que, la heterogeneidad, además de ayudar a la sincronización, es capaz de inducir comportamientos colectivos ordenados en un sistema dinámico.

### Agradecimientos.

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo del Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico, Tecnológico y de las Artes de la Universidad de Los Andes, en Mérida, Venezuela, mediante el proyecto No. C-1692-10-05-B.

### Referencias

- Alvarez-Llamoza O y Cosenza M G, 2007, Chaotic singular maps, CIENCIA, Vol. 15, No. 4, pp. 438 - 443.  
 Cosenza M G y González J, 1998, Synchronization and collective behavior in globally coupled logarithmic maps, Prog. Theor. Phys. Vol. 100, No. 1, pp. 21-38.  
 González Estévez J, 2001, Tesis de Maestría, Postgrado en Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.  
 Kaneko K, 1992, Focus issue on coupled map lattices, Chaos, Vol. 2, No. 3, pp. 279-407.  
 Kaneko K, 1994, Relevance of clustering to biological networks, Physica D., Vol. 75, pp. 55-73.  
 Shibata T, Chawanya T y Kaneko K, 1999, Noiseless collective motion out of noisy chaos, Phys. Rev. Lett., Vol. 82, No. 22, pp. 4424-4427.  
 Shibata T y Kaneko K, 1997, Heterogeneity induced order in globally coupled chaotic systems, Europhys. Lett., Vol. 38, No. 6, pp. 417-422.

**Recibido:** 15 de julio de 2011

**Revisado:** 20 de octubre de 2011