

Efecto del número de Froude densimétrico en el transporte de sedimentos

Effect of the densimetric Froude number on sediment transport

Julián Aguirre-Pe, María L. Olivero N. y Alix T. Moncada M.
Centro de Investigaciones Hidráulicas y de Mecánica de Fluidos (CHIDRA)
Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

Resumen

En este trabajo se consideran las condiciones de iniciación del movimiento de partículas sueltas en el lecho de canales o ríos con contornos de gran rugosidad (profundidad menor que 10 veces la rugosidad) y alta pendiente (pendiente mayor que 0,01). Se analiza el criterio de la velocidad media del flujo en la definición de las condiciones de iniciación del movimiento y se considera el número de Froude densimétrico crítico de la partícula como criterio para estimar las condiciones hidráulicas de iniciación del movimiento.

Se presentan y se describen algunos de los procedimientos más empleados en la estimación del transporte del material del lecho en una corriente de alta pendiente. Se considera el caudal como variable determinante de las condiciones de arrastre y se incorpora la influencia del número de Froude densimétrico de las partículas en el transporte de sedimentos. Se comparan los resultados de las diferentes aproximaciones con datos de laboratorio y de ríos. Se propone una nueva función de transporte, que muestra buena aproximación, para estimar el acarreo de sedimentos gruesos en ríos de alta pendiente y gran rugosidad.

Palabras claves: iniciación del movimiento, rugosidad, alta pendiente, Froude densimétrico, transporte de material, función de transporte.

Abstract

In this paper, critical conditions for the initiation of particle motion are considered for ratios depth to bed particle less than 10 (flow on very rough boundaries). Here, a densimetric Froude number of the particles is analysed as an alternative criterion to predict hydraulic conditions for the initiation of motion. Critical densimetric Froude numbers of the particles were determined after calibration with available laboratory data.

Some of the most employed formulations to estimate bed material transport in high slope macro-rough flows are described. Most of the theories consider the excess of boundary shear stress, above the critical shear stress, as the dominating parameter that defines sediment transport. Two procedures, that were specifically developed to predict sediment transport in high slope streams, are presented. One of them considers the excess of a dimensionless discharge, above the critical discharge, the second one incorporates the influence of the densimetric Froude number of the particles, in excess of its critical value. A new transport function, that shows a better behavior than the previously analyzed formulations, is proposed in this paper for high slope macro-rough streams.

Keywords: initiation of particle motion, rough boundaries, densimetric Froude, transport function, high slope macro-rough streams.

1 Introducción

La relación mejor conocida para describir la iniciación del movimiento de partículas de sedimentos fue propuesta por Shields (1936) quien llevó a cabo experimentos sistemáticos y usó datos obtenidos por otros investigadores para

determinar el esfuerzo cortante crítico adimensional en función del número de Reynolds de las partículas. La relación de Shields se expresa como

$$\tau_c^* = \frac{\tau_{oc}}{(\gamma_s - \gamma)D} = f\left(\frac{Du_*}{\nu}\right) \quad (1)$$

donde f indica una función, τ_{oc} es el esfuerzo cortante que se produce en el contorno para la iniciación del movimiento, τ_c^* es su valor adimensional, γ_s y γ son los pesos específicos de la partícula y del fluido respectivamente, D es el diámetro de la partícula, $u_* = (\tau_{oc}/\rho)^{1/2}$ es la velocidad de corte, (ρ es la densidad del fluido y ν es la viscosidad cinemática) y Du_*/ν es el número de Reynolds de la velocidad de corte, el cual se puede expresar en términos del espesor δ' de la sub-capa límite laminar del contorno como

$$R^* = \frac{Du_*}{\nu} = 11,6 \frac{D}{\delta'} \quad (2)$$

la cual indica que el efecto de fricción en la sub-capa límite laminar es función de la sumersión de la rugosidad del contorno en la sub-capa límite viscosa. El parámetro adimensional de Shields se relaciona con el número de Reynolds del contorno R^* según la expresión

$$D^* = \left(\frac{R^*}{\tau_c^{*/2}} \right)^{2/3} \quad (3)$$

donde el llamado diámetro adimensional de la partícula

D^* está dado por

$$D^* = D \left(\frac{g\Delta^*}{\nu^2} \right)^{1/3} \quad (4)$$

en la cual g es la aceleración de gravedad y $\Delta = (\gamma_s - \gamma)/\gamma$. Una extrapolación a cero de la descarga de sedimentos permitió asignar al esfuerzo cortante adimensional, para $R^* > 200$, un valor crítico $\tau_c^* = 0,060$. De acuerdo con Meyer-Peter y Müller (1948), un valor que corresponde mejor con sus datos experimentales, para $R^* > 200$, es $\tau_c^* = 0,047$.

La ley de potencia un sexto dada por Brahm (1753) para la iniciación del movimiento de piedras, en función de la velocidad, corresponde a una relación de forma $U_c \sim D^{1/2}$, donde U_c es la velocidad media crítica. Breusers (1982) señaló que la ecuación que presenta la velocidad media crítica requerida para mover piedras, dada en forma adimensional por un número de Froude crítico de la partícula, es una función del log (d/D), en la cual d es la profundidad del flujo.

Como en el flujo sobre lechos muy rugosos, de pendiente pronunciada, predominan los fenómenos macro turbulentos, se producen algunas dificultades cuando se intenta definir las condiciones críticas para la iniciación del

movimiento. Una de ellas está relacionada con la definición del umbral de movimiento de la partícula. Otro problema recae en la definición de la profundidad. El primer problema puede ser resuelto por extrapolación a cero, o a una constante de pequeño valor, del transporte medio de sedimentos. El segundo problema puede ser evitado, como fuera hecho por Bathurst et al. (1983), considerando el transporte crítico adimensional solamente como una función de la pendiente. Una aproximación diferente, que también se considera en este trabajo, es definir la profundidad como la distancia desde el tope de las partículas medias del lecho hasta la superficie libre media.

2 Análisis de la iniciación del movimiento

En la Fig. 1 se presenta el esquema de definición para las variables que intervienen en la iniciación del movimiento de una partícula. Cuando el momento, dado por las fuerzas actuantes F_D del fluido en movimiento, es igualado con el momento producido por las fuerzas del cuerpo F_G , alrededor de algún punto (ver Figura 1), se establecen las condiciones críticas para la iniciación del movimiento de las partículas del lecho.

Se considera una zona de estelas cerca del lecho (Aguirre-Pe y Fuentes, 1990) y se supone en un primer grado de aproximación, una velocidad media cerca del lecho de valor constante u_l . Las condiciones críticas se establecerán para $u_l = u_{lc}$, precisamente cuando

$$\frac{\rho \delta_1 u_{lc}^2 D_0^3}{(\rho_s - \rho) \delta_2 g D_0^4 \cos\theta (\tan\phi - \tan\theta)} = 1 \quad (5)$$

donde ρ_s es la densidad de las partículas sólidas, θ es el ángulo longitudinal del lecho del canal, ϕ es el ángulo de fricción de las partículas del lecho, y δ_1 y δ_2 son factores que dependen de la velocidad del fluido próximo al lecho y la forma de las partículas. El diámetro de la partícula D_0 , sujeto a condiciones críticas se supone proporcional al tamaño medio D de las partículas de acuerdo a la relación $D_0 = \delta_3 D$, donde δ_3 es una constante.

La velocidad se supone que sigue la ley logarítmica de Prandtl-von Kármán para $y \geq \beta D$, donde y es la distancia desde el tope del lecho y β el factor de estela. Por lo tanto, se puede mostrar, en el modelo de estela (Aguirre-Pe et al., 1986), que para $y = \beta D$, se tiene la velocidad crítica u_{lc} como

$$\frac{u_{lc}}{u_{*c}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\beta D}{\alpha D} + B \quad (6)$$

donde $\kappa = 0,40$ es la constante universal de von Kármán, α es el factor de textura y B una función aditiva que aproxima el valor de 8,5 a un alto número Reynolds de la partícula, u_{*c} es la velocidad de corte crítica que puede ser expresada como U_c / C_c^* , donde U_c es la velocidad crítica media del flujo y C_c^* el coeficiente adimensional crítico de Chézy, modificado por Aguirre-Pe y Fuentes (1990, 1991). De Ec. (5) y Ec. (6) se obtiene

$$\frac{U_c}{(g \Delta D_0 \cos \theta (\tan \phi - \tan \theta))^{1/2}} = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{1/2} \frac{C_c^*}{\frac{I}{\kappa} \ln \frac{\beta}{\alpha} + B} \quad (7)$$

donde C_c^* se expresa, en modelo de estela por Aguirre-Pe y Fuentes (1990), como

$$C_c^* = 2,5 \ln \left(\frac{d}{\alpha D} \right) + 6,0 + 2,5 \frac{\beta D}{d} \quad (8)$$

Dado que en la Ec. (7), α , β y δ_i dependen de la forma, del tamaño relativo de los elementos y de las condiciones del flujo, una formulación para el número de Froude crítico de las partículas, F_c^* , debería estar dada por la relación funcional

$$F_c^* = \frac{U_c}{(g \Delta D_0 \cos \theta (\tan \phi - \tan \theta))^{1/2}} = f_1(d/D, D_0/D, FF) \quad (9)$$

donde FF son factores de forma que describen las partículas.

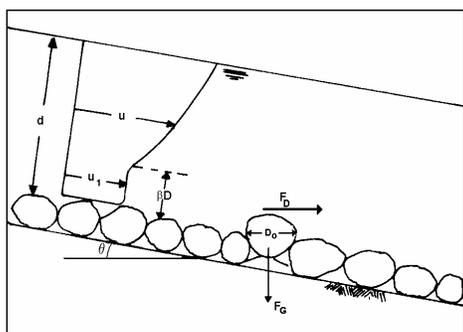


Fig.1. Acción del flujo sobre una partícula suelta

Introduciendo en las ecuaciones (8) y (7) se obtiene una relación explícita para F_c^* . Como se discutió anteriormente, los coeficientes de las partículas no son constantes, pero aceptando alguna dispersión, la siguiente ecuación representa bastante bien los datos experimentales,

$$F_c^* = 0.9 + 0.5 \ln \left(\frac{d}{D} \right) + 1.3 \frac{D}{d} \quad (10)$$

La relación de la Ec. (10) representa a la Ec. (7) para valores aproximados de $\alpha = 2,4$; $\beta = 1,3$ y para $(\delta_2/\delta_1)^{1/2} = 1,4$. Estos valores corresponden a casos de laboratorio verificados por Aguirre-Pe y Fuentes (1991). Para los coeficientes dados, las ecuaciones (7) y (10) pueden expresarse en forma más compacta, como:

$$F_c^* = \frac{1}{5} C_c^* \quad (11)$$

la cual corresponde aproximadamente a la identidad

$$F_c^* = \tau_c^{*1/2} C_c^* \quad (12)$$

3 Transporte de material del lecho

Para estimar el transporte de sedimentos en cauces con grandes partículas sueltas y alta pendiente, se pueden considerar, por su general bondad y extensa aplicación a cauces de alto gradiente hidráulico, los procedimientos desarrollados por Meyer-Peter y Müller (1948), Ackers y White (1973), Smart y Jaeggi (1983), así como el de van Rijn (1987). Todas estas metodologías ofrecen estimaciones de transporte dependientes de los esfuerzos cortantes y de los esfuerzos cortantes críticos para la iniciación del movimiento.

Bathurst et al. (1987) ofrecieron un predictor de transporte basado en relación previa de Schoklitsch (1962) que considera el exceso de caudal sobre el caudal crítico requerido para iniciar el movimiento de las partículas. También se analiza el número de Froude densimétrico de la partícula, empleado por Mora (1990) y Mora et al. (1990), como parámetro regulador del transporte de sólidos.

Conviene precisar que la referencia a ríos de montaña o cauces muy rugosos de alta pendiente se refiere, en términos hidráulicos, a cauces con una rugosidad relativa al radio hidráulico mayor que aproximadamente 0,1 y una pendiente longitudinal mayor que 0,01 y que puede llegar hasta 0,20.

Se escogen datos experimentales, obtenidos por diferentes autores en canales de laboratorio para bajas profundidades relativas $d/D \leq 10$, seleccionados de la compilación de Brownlie (1981). También se emplean datos adicionales sobre transporte de gravas y piedras, de los experimentos de Smart y Jaeggi (1983), Bathurst et al. (1987) y Aguirre-Pe cuyos datos fueron presentados por Mora (1990) y Mora et al. (1990). Se incluye información experimental sobre ríos macrorugosos reunida por Hydrau-Tech, Inc. (1998).

4 Funciones para estimar el transporte de fondo

El transporte de sedimentos, en volumen por unidad de tiempo y unidad de ancho q_s , puede expresarse en forma adimensional como

$$\Phi^* = \frac{q_s}{D(g\Delta D)^{1/2}} \quad (13)$$

en la cual Φ^* es el parámetro de transporte de Einstein (1942). La relación de transporte de sedimentos de Meyer-Peter y Müller (1948) puede escribirse de la forma

$$\Phi^* = 8(\lambda\tau^* - \tau_c^*)^{3/2} \quad (14)$$

donde λ es un factor numérico que depende de las condiciones del contorno de sedimentos y que, en ausencia de formas se toma igual a 1, τ^* y τ_c^* son el parámetro de Shields y el parámetro crítico de Shields como se definió previamente.

La relación funcional de Ackers y White (1973) se puede expresar, para sedimentos gruesos con $D_* > 60$, por la relación

$$\Phi^* = \frac{0,025}{D(g\Delta D_{35})^{1/2}} q \frac{D_{35}}{d} \left(\frac{P^*}{0,17} - 1 \right)^{1,5} \quad (15)$$

en la cual D_{35} es el diámetro del 35% del material, q es el caudal de agua por unidad de ancho y la variable P^* está dada por

$$P^* = \frac{1}{(gD_{35}\Delta)^{1/2}} \left[\frac{U}{32^{1/2} \log \left(10 \frac{d}{D_{35}} \right)} \right] \quad (16)$$

que se define como el número de movilidad del sedimento y equivale a la relación entre el esfuerzo cortante medio y el peso sumergido de una capa de partículas en el fondo. La ecuación de Ackers y White fue calibrada para números de Froude menores que 0,8.

La relación de Smart y Jaeggi (1983), basada en experimentos en canales con partículas en el contorno de hasta 29 mm y pendientes de hasta el 20%, permite predecir el transporte en función de la pendiente, del coeficiente adimensional de Chézy, del esfuerzo cortante adimensional y del exceso de esfuerzo cortante adimensional sobre el valor crítico, en la forma

$$\Phi^* = 4 \left[\frac{D_{90}}{D_{30}} \right]^{0,2} S^{0,6} C^* \tau^{*0,5} [\tau^* - \tau_{c,j}^*] \quad (17)$$

donde D_{90} y D_{30} representan los diámetros del 90 y el 30% del material, respectivamente y $\tau_{c,j}^*$ es el esfuerzo cortante crítico dado por

$$\tau_{c,j}^* = \tau_c^* \cos(\arctan S) \left[1 - \frac{S}{\tan \phi} \right] \quad (18)$$

Como puede observarse, las relaciones por Smart y Jaeggi corresponden a una versión más completa de la ecuación de transporte de Meyer-Peter y Müller. Van Rijn (1987) propuso la relación funcional

$$\Phi^* = \frac{0,053}{D^{*0,3}} \left[\frac{F^{*2}}{C_0^{*2} \tau_c^*} - 1 \right]^{2,1} \quad (19)$$

en la cual F^* es el número de Froude densimétrico de la partícula, τ_c^* es el esfuerzo cortante crítico adimensional y el coeficiente de Chézy C_0^* está dado por

$$C_0^* = 5,75 \log \left[\frac{12R_f}{3D_{90}} \right] \quad (20)$$

donde R_f es el radio hidráulico relacionado con el fondo, para el cual se ha realizado la corrección de la pared siguiendo el método de Vanoni y Brooks (1957).

Bathurst et al. (1987) mostraron que el transporte de sedimentos puede expresarse como función de la pendiente y del caudal en exceso del caudal crítico dado por la expresión de Schoklitsch (1962). En forma adimensional, el transporte puede tomar la forma

$$\Phi^* = \frac{2,5 S^{3/2}}{(\Delta + 1) D_{50} (g\Delta D_{50})^{1/2}} [q - q_c] \quad (21)$$

en la cual D_{50} es el diámetro del 50% del material sólido, q es el caudal de agua por unidad de ancho y el caudal crítico q_c^* se obtiene de la relación experimental adimensional

$$q_c^* = \frac{q_c}{g^{1/2} D_{50}^{3/2}} = 0,15 S^{-1,12} \quad (22)$$

en la cual el D_{50} se obtiene en la capa subsuperficial del fondo. En forma alternativa, se puede emplear el D_{16} , para el 16% del material, de la capa superficial del fondo en la expresión

$$q_c^* = \frac{q_c}{g^{1/2} D_{16}^{3/2}} = 0,21 S^{-1,12} \quad (23)$$

5 Estimación del transporte como función del número de Froude densimétrico del sedimento

Una función de transporte basada en el criterio de que el transporte de sedimentos puede ser una función del exceso de la velocidad media sobre la velocidad media crítica, fue propuesta por Mora et al. (1990), calibrada con los datos de la Tabla 1. Esta relación está dada por

$$\Phi^* = \frac{q_s}{D_{50}^{3/2} (\Delta g)^{1/2}} = 0,0072 C^* S (F^{*2} - F_c^{*2})^{3/2} \quad (24)$$

donde F^* es el número de Froude densimétrico de la partícula dado por

$$F^* = \frac{U}{(g \Delta D_0 \cos \theta (\tan \phi - \tan \theta))^{1/2}} \quad (25)$$

y F_c^* su valor crítico, que se expresa experimentalmente por la Ec. (10).

6 Análisis de transporte

Se desarrolló un análisis del transporte del material grueso en función de los parámetros considerados en las diferentes metodologías. Para comparar su desempeño, se obtuvieron los errores medios y los coeficientes de correlación de cada una de las funciones analizadas, así como el número de datos, de un total de 507, a los cuales no era aplicable el correspondiente predictor de transporte.

Tabla 1. Precisión de los predictores de transporte sólido

Función	Error (%)	Correlación	Datos excluidos
Meyer Peter y Müller (1948)	132	0,33	128
Ackers y White (1973)	1489	0,46	37
Smart y Jaeggi (1983)	100	0,94	140
Van Rijn (1984)	3095	0,56	58
Schoklitsch (1962)	81	0,94	102
Mora et al. (1990)	7612	0,90	108

De la valoración de la información contenida en la Tabla 1 se desprende que el predictor de Schoklitsch (1962), complementado por Bathurst et al. (1987), es el que predice el acarreo de sólidos con mayor precisión, le sigue en desempeño el predictor de Smart y Jaeggi (1983), pero los dos métodos excluyen cerca del 20% de los datos experimentales.

7 Nueva relación de transporte

El estudio de nueva información sobre acarreo en función del número de Froude densimétrico de la partícula llevó a proponer que el transporte Φ^* se expresara por la relación funcional

$$\Phi^* = f(F^*, F_c^*, S, C^*) \quad (26)$$

Primero se en la Fig. 2. realizaron múltiples tanteos para determinar las posibles correlaciones entre Φ^* y $(F^* - F_c^*)$ o entre Φ^* y $(F^{*2} - F_c^{*2})$. Se encontró que los datos experimentales arrojaban mejores ajustes cuando no se incluía F_c^* en la función de transporte. Luego se procedió a obtener los coeficientes de una ecuación de potencias a través de un análisis de correlación múltiple y se encontró que la mejor estructura de la relación experimental está dada por la Ec. (27), presentada

$$\Phi^* = 1,50 S^{1/2} C^{*-4} F^{*6,0} \quad (27)$$

con un error medio del 104% y un coeficiente de correlación de 0,707. Si (27) se confronta con el banco de datos experimentales, se obtienen los resultados de la Tabla 2.

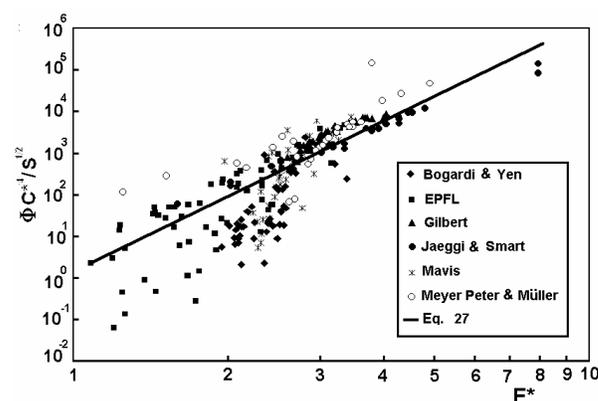


Fig. 2. Estimación del transporte en función del número de Froude densimétrico de las partículas, del coeficiente de Chézy y de la pendiente

Si se analizan las desviaciones experimentales y se compara el error medio, el coeficiente de correlación y el número de datos excluidos en la Ec. (27), se concluye que

la Ec. (27) es un buen predictor de transporte de sólidos en canales y ríos con alta pendiente para $S > 0,01$ y altas rugosidades con $d/D < 10$.

Tabla 2. Discrepancias de (27) con datos experimentales

% de datos	Desviación media	Desviación máxima
25	21	40
50	42	81
80	63	128
90	74	198

8 Conclusiones

Se propone un criterio para determinar la velocidad crítica media asociada con la iniciación del movimiento de una partícula en cauces macro-rugosos ($D > d/10$). Se encuentra que F_c^* , el número de Froude densimétrico crítico de las partículas, correspondiente a U_c , es función preponderante de d/D . El concepto de caudal crítico, como lo presenta Bathurst et al. (1987) conduce a valores apropiados, similares a aquéllos obtenidos para el número de Froude densimétrico crítico.

Se analiza el transporte de sólidos para flujos en canales de fondo macro-rugoso y pendientes pronunciadas considerando: el criterio del esfuerzo cortante crítico asociado con el movimiento inicial de las partículas, el criterio de caudal crítico y el criterio del número de Froude densimétrico crítico de la partícula. Del análisis de información sobre transporte para bajas profundidades relativas, $d/D < 10$, se encuentra que la nueva relación de transporte de la Ec. (27), presenta buen comportamiento como predictor del transporte, superior al de los mejores predictores basados en el criterio del esfuerzo cortante.

Así, con base en datos de experimentos convalidados, se determina que el transporte de sedimentos gruesos es función del número de Froude densimétrico de la partícula así como de la pendiente de la línea de energía y del coeficiente de Chézy adimensional, según la Ec. (27). Se verifica que la función de transporte obtenida se ajusta más adecuadamente que otras relaciones a datos de diferentes investigadores, para flujo muy rugoso en cauces de alta pendiente.

9 Referencias

- Ackers, P. y W. R. White (1973). Sediment transport: New approach and analysis. *Journal of the Hydraulic Division, ASCE*, Vol. 99, HY11, pp. 2041-2060.
- Aguirre-Pe, J. y R. Fuentes (1990). Resistance to flow in steep rough streams. *Journal of the Hydraulic Division, ASCE*, Vol. 116, No. 11, pp. 1374-1387.
- Aguirre-Pe, J. y R. Fuentes (1991). Movement of big particles in steep macro-rough streams. *Proceedings of the XXIV International Congress, IAHR*, Vol. A, pp. 149-158, Madrid, España.
- Aguirre-Pe, J., R. Fuentes y M. L. Olivero (1986). Una fórmula para la fricción en escurrimientos macrorugosos a superficie libre. *Memorias del XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, AIIH*, Vol. 1, pp. 86-95, Sao Paulo, Brasil.
- Bathurst, J. C., W. H. Graf y H. H. Cao (1983). Initiation of sediment transport in steep channels with coarse bed material. *Mechanics of sediment transport*, Editado por Sumer, B. M. Y Müller, A., Balkema, Rotterdam, Holanda, pp. 207-213.
- Bathurst, J. C., W. H. Graf y H. H. Cao (1987). Bed load discharge equations for steep mountain rivers. Cap. 15 de *Sediment transport in gravel bed rivers*, Edit. por C. R. Thorne, J. C. Bathurst y R. D. Hey, John Wiley and Sons, New York, USA, pp. 453-491.
- Brahms, A. (1753). *Anfangsgründe de Deich-und Wasserbaukunst*. Austria.
- Breusers, H. N. C. (1982). Lecture notes on sediment transport. *International Course in Hydraulic Engineering*, Delft, Holanda.
- Brownlie, W. R. (1981). *Compilation of alluvial channel data: laboratory and field*. Report No. KH-R-43B, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA.
- Einstein, H. A. (1942). Formulas for the transposition of bed load. *Transactions ASCE*, Vol. 107, Paper 2140, p.p 561-573.
- Hydrau-Tech, Inc., (1998). *Sed Base, sediment transport data base, Sedbase 3*, CD Rom, Fort Collins, Colorado, USA.
- Meyer-Peter y R. Müller (1948). Formulations of the bed-load transport. *II International Congress IAHR*, pp. 39-64, Stockholm, Suecia.
- Mora, E. (1990). Estudio comparativo de fórmulas de gasto sólido para material grueso. Trabajo de ascenso a la categoría de Profesor Agregado. Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.
- Mora, E.; J. Aguirre-Pe y R. Fuentes (1990). Fórmulas de gasto sólido para el flujo macrorugoso. *Memorias del XIV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, AIIH*, Vol. 3, pp. 1537-1548, Montevideo, Uruguay.
- Schoklitsch, A. (1962). *Handbuch des Wasserbaues*. 3ra ed, Springer-Verlag, Vienna, Austria.
- Shields, A. (1936). *Anwendung der aehnlichkeitsmechanik der turbulenzforschung auf die geschiebepbewegung*. Mitt. der Preuss. Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, Alemania.
- Smart, G. M. y M. Jaeggi (1983). Sediment transport on steep slopes. *V.A.W., Mitteil 64, Hydrologie und Glaziologie, ETH, Zurich, Suiza*, pp. 191
- Van Rijn, L. C. (1987). Mathematical modelling of morphological processes in the case of suspended sediment transport. *Delft Hydraulics Communication No. 382*, Delft, Holanda
- Vanoni, V. A. y Brooks, N. H. (1957). *Laboratory studies of the roughness and suspended load of alluvial streams*. Sedimentation Laboratory, California Institute of Technology, Report E-68, Pasadena, California, USA.