CIENCIA E INGENIERIA Vol.XIX,Nº1,1 a 6(1987)

DIVERSION ACERCA DEL PROBLEMA DE NAPOLEON

Gérard DEFIVES
Escuela de Ingeniería Civil
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

RESUMEN

El problema de Napoleón es el siguiente: Dado un círculo, encontrar solamente con el compás, su centro (o su radio). Se proponen aquí dos soluciones. La primera, clásica, es un pretexto para hacer uso de una forma de demostración lógica poco común. También se da la justificación de la misma construcción mediante un pequeño cálculo. La segunda construcción ilustra gráficamente el concepto límite.

ABSTRACT

Entertaiment about Napoleon's problem. Napoleon's Problem is this one: how to obtain, with a compass alone, his center (or his radius). Two solutions are purposed here. First, a classic one, with a purely logical demonstration, rarely met. A calculus proof is also given of the same constructions. The second purposed construction is a graphic illustration of the concept of limit.

INTRODUCCION

Se trata de una diversión matemática sin pretenciones, que, sin embargo, presenta cierto interés pedagógico.

Durante la primera campaña de Italia (1796-97) que hizo famoso el nombre del general Bonaparte, éste se encontró con el matemático italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800) quién le presentó sus trabajos. Mascheroni había demostrado que todo punto construible con la regla y el compás puede serlo también con el sólo compás. De regreso a Paris, Bonaparte, elegido en el Instituto en la clase de Ciencias Matemáticas y Físicas, dió a conocer a sus colegas Laplace, Monge, Borda, Lagrange, Fourier etc... la obra Mascheroni. En esta oportunidad, Bonaparte les sometió el problema que ahora lleva su nombre (pero no su apellido). El mismo les dió una solución personal.

PRIMERA SOLUCION DEL PROBLEMA

Aquí termina la disgresión anecdótica. Estamos buscando el centro O de un círculo dado C (Figura 1). A partir de un punto A cualquiera del círculo dado, se traza un círculo de radio cualquiera, pero de tal forma que intersecte el círculo dado en dos puntos. Designamos por B y B´ a estos puntos. Trazamos luego dos círculos de centros B y B´y radios BA = B´A. Estos círculos se encuentran en el punto G, también ubicado sobre la recta OA por la simetría de la figura. El círculo C´de centro G y radio GA intersecta el círculo Γ de centro A en dos puntos E y E´. Los círculos de centros E y E´ y radios EA = E´A se intersectan en el centro O buscando.

¿Porqué?

Si consideramos la figura globalmente, nos damos cuenta que si, al revés, estamos buscando G el centro del círculo C´, se operaría de la siguiente forma: Trazamos el círculo Γ de centro A que se encuentra el círculo C´en E y E´, y los círculos de centros E y E´con radios EA = E´A que se cortan en O. El círculo C de centro y radio OA intersecta a su vez el círculo en B y B´. El centro G se consigue en la intersección de los círculos de centros B y B´de radios BA = B´A.

La figura es la misma y los pasos de la construcción se suceden en el orden opuesto al anterior. Es decir que el círculo C de centro O juega en la busqueda de G el mismo papel que el círculo C´ de centro G en la busqueda de O. Lo que hace que si G está en la intersección de los círculos de centros B y B´, O debe estar en la intersección de los círculos de centros E y E´, y recíprocamente.

Lo mismo se puede expresar de otra manera. Si, usando este método no se consigue O en la intersección de los círculos de centros E y E´ en la primera fase, la misma maniobra tampoco nos dará G en la intersección de los círculos de centros B y B´ en la segunda fase. Es absurdo ya que hemos definido G en la primera fase como siendo la intersección de los círculos de centros B y B´.

No es sin interés observar que si en la mayoría de las construcciones geométricas, el razonamiento se apoya sobre el estado, es decir que se justifica el proceso constructivo en base a las propiedades de la figura resultante, aquí al contrario, la propiedad fundamental de la figura resultante, a saber: el punto O en la intersección de los círculos de centros E y E′, y el punto G en la intersección de los círculos de centros B y B′, resulta de la dinámica de la construcción.

Otra justificación de la misma construcción se apoya sobre el concepto de potencia de un punto con respecto a un círculo. (Ver la Figura 2).

Los círculos de centros B y B′ que pasan por A se cortan en G. La recta BB′ corta D, el eje de simetría de la figura, que contiene el centro O buscado, en un punto I, punto medio de GA, porque BG = BA. Los círculos de centros E y E′ que pasan en A se cortan en O′. Vamos a mostrar que O = O′.

La recta EE′ encuentra D en I′, punto medio de O′A. Si I′ es al mismo tiempo el punto medio de OA, es que entonces O = O′, y esto justificará la construcción.

Designamos por R el radio del círculo C dado, por R′ = GA el radio del círculo C′, y por ρ = AB = AB′ el radio del círculo Γ .

El punto I está sobre el eje radical de los círculos Γ y C. (Ver anexo).

$$IA^2 - \rho^2 = IO^2 - R^2$$
$$IA^2 - IO^2 = \rho^2 - R^2$$

$$(\overline{IA} + \overline{IO})(\overline{IA} - \overline{IO}) = \rho^2 - R^2 = (\overline{IA} + \overline{IA} + \overline{AO})(\overline{OA})$$
$$2\ IA + AO = \frac{\rho^2 - R^2}{R}$$

de donde $\overline{IA} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2 - R^2}{R} + R\right) = \frac{\rho^2}{2R}$

El punto I′ está sobre el eje radical de los círculos Γ y C′, y se obtiene de la misma forma:

$$I'A = \frac{\rho^2}{2R'}$$

Como I es el punto medio de GA: $IA = \frac{R'}{2} = \frac{\rho^2}{2R}$

De ahí $\frac{\rho^2}{2R'} = \frac{R}{2}$ luego $I'A = \frac{R}{2}$

Luego I′ es el punto medio de OA, y O′ = O.

SEGUNDA CONSTRUCCION

Un proceso iterativo permite lograr soluciones aproximadas "tan buenas como se quiere" y permite ilustrar el concepto de límite de una sucesión de puntos en forma gráfica, sin la intervención de cálculos. (Ver figuras 3 y 4).

En lugar de buscar directamente el centro del círculo C, buscaremos su radio. Una vez conocido el radio, la obtención del centro es inmediata.

De un punto A cualquiera del círculo C dado, trazamos un círculo de radio r inferior al diámetro del círculo C de tal forma que los círculos se intersecten. Sea B una de las intersecciones. Un círculo de mismo radio r centrado en B encuentra el círculo anterior de centro A en un punto E. El ángulo EAB mide $\pi/3$. Vamos a construir una sucesión de puntos que tenga como límite el punto L que se encuentra sobre el círculo C dado y sobre la bisectriz del ángulo EAB. Como el ángulo LAB mide $\pi/6$, el ángulo LOB mide $\pi/3$, luego LB es igual al radio.

En realidad, aparecen dos sucesiones que convergen simultáneamente hacia L: una sobre la bisectriz AL, la otra sobre el círculo dado C. El punto P_1, intersección del arco de radio BE = r y centro en E con el arco de centro B y radio r, está sobre la bisectriz AL. El punto Q_1 sobre el círculo C y el arco de centro B y radio r inicia la otra sucesión. El punto P_2, intersección del arco de centro E y radio EQ_1, está también sobre AL, y este último círculo corta el círculo C en Q_2, etc...

Dos figuras son posibles. La Figura 3 muestra las sucesiones obtenidas cuando el radio r del círculo de centro A, que se usa para iniciar el proceso, es inferior al radio R del círculo dado C. La Figura 4 muestra las sucesiones obtenidas cuando $R < r < 2R$

En ambos casos, la convergencia es obvia.

ANEXO

Se usaron aquí varios conceptos quizás útiles de recordar. Sólo damos los resultados, las justificaciones se pueden encontrar en (2) o en cualquier otro texto clásico de geometría.

1) Potencia de un punto con respecto a un círculo.

Cuando una secante variable pasando por un punto fijo M intersecta un círculo C dado en dos puntos A y B, el producto MA.MB es una constante llamada "Potencia del punto M respecto al círculo C". Esta constante vale $OM^2 - R^2$, siendo O el centro del círculo C, y R su radio.

2) Eje radical.

El lugar geométrico de los puntos que tienen misma potencia con respecto a dos círculos C y C′ es una recta ortogonal a la recta que pasa por los centros de C y C′. Esta recta se llama "Eje radical de los círculos C y C′".

Puesto que los puntos de un círculo tienen una potencia nula con respecto a este círculo, el eje radical de dos círculos que se intersectan es la recta que pasa por las intersecciones de los círculos.

REFERENCIAS

<1> CARREGA J.C.; Théorie des Corps. La regle et le compas. Hermann, Paris (1981)

<2> LABOSSE C., HEMERY C.; Géométrie (Classe de Mathématiques) Fernand Nathan, Paris (1958)

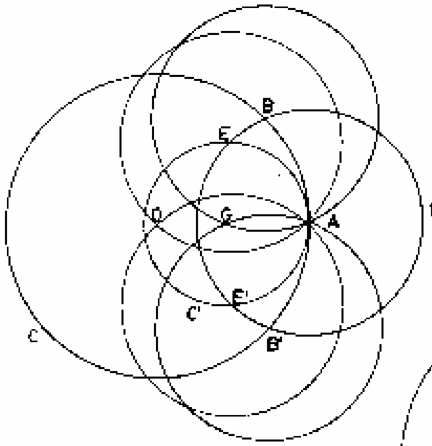

FIGURA 1

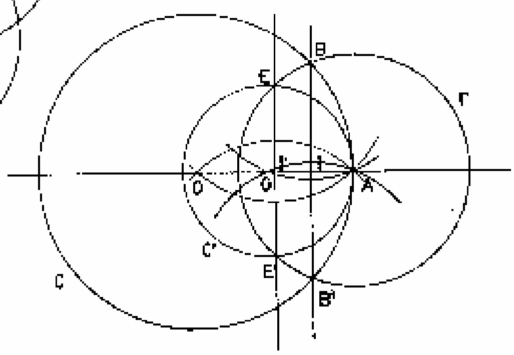

FIGURA 2

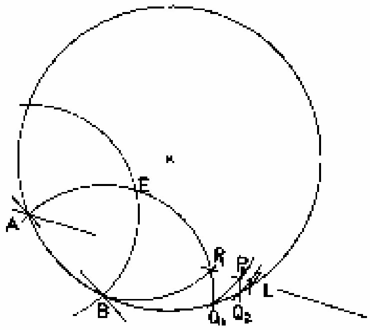

FIGURA 3

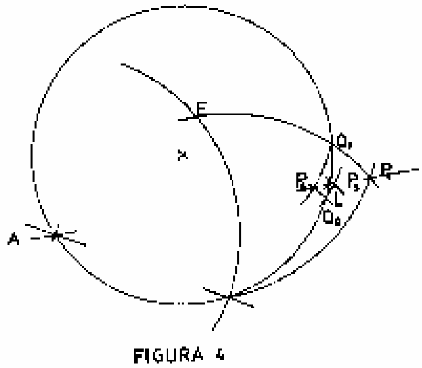

FIGURA 4