

Deducción analítica del módulo en mezclas asfálticas asociado al ensayo de tracción indirecta

Analytical deduction of module in asphalt mixtures associated with indirect tensile test

Araujo, Nómar^{1*}; Márquez, Jogly²

¹Núcleo Universitario Rafael Rangel, Departamento de Ingeniería, NURR-ULA, Universidad de Los Andes, Trujillo, Venezuela.

²Laboratorio de Planificación y Desarrollo Físico Rural, Núcleo Universitario Rafael Rangel, Departamento de Ingeniería, NURR-ULA, Universidad de Los Andes, Trujillo, Venezuela.

*araujonomar@ula.ve

Resumen

Para determinar el módulo de probetas cilíndricas construidas con mezclas asfálticas, es aplicado un procedimiento de laboratorio mundialmente difundido y normalizado como es el ensayo de tracción indirecta. Esta prueba además de presentar gran confiabilidad de sus resultados y sencillez del equipo de aplicación, está respaldada por un basamento teórico bien definido y que ha dado origen a expresiones analíticas en función de la carga máxima aplicada y la deformación resultante. Partiendo de los principios de distribución interna de esfuerzos de elementos sometidos a carga diametral y tomando como referencia las relaciones planteadas por diferentes investigadores, se desarrolló parte de este trabajo en la que se plantearon deducciones y se realizaron diversas integraciones matemáticas por medio de un reconocido software denominado Mathcad 14, el cual permitió comprobar las operaciones y obtener los valores que configuran las expresiones resultantes de módulo asociadas al ensayo. Además, se consideró el planteamiento teórico de distribución de esfuerzos propuesto para la condición de carga vertical aplicada a través de una placa o cabezal de apoyo, similar a la utilizada en la ejecución de la prueba y se establecieron relaciones que a pesar de su complejidad, fue posible resolver las operaciones de integración con apoyo del software (Mathcad 14), y de las que se obtuvo valores que dan forma a las expresiones comúnmente usadas para el cálculo del módulo elástico o resiliente.

Palabras claves: mezclas asfálticas, ensayo de tracción indirecta, distribución de esfuerzos, módulo elástico, módulo resiliente.

Abstract

In order to determine the modulus of cylindrical specimens which were constructed with asphalt mixtures, is applied the indirect tensile test which is a laboratory procedure globally standardized. This test, besides of has a good reliability of its results and a simplicity application of the equipment, has a well-defined theoretical basis that has given rise to analytical expressions in terms of the maximum applied load and the resulting deformation. Starting from the principles of internal stress distribution of specimens subjected to diametral load and by reference to the relationships proposed by different researchers, was developed part of this work in which some deductions were raised and several mathematical integrations was done through a recognized software called Mathcad 14, which allowed to verify the operations and get the parameters used to resulting expressions associated to module test. Also, in this work was taking in account the theoretical stress distribution which is proposed to condition of vertical load applied through a plate or support head, similar that used by us in the execution of the test and we established some relations that despite of their complexity, allowed us to solve integration operations with support Mathcad 14 software, and get values and parameters that can be used for calculate the elastic or resilient modulus.

Keywords: asphalt mixtures, indirect tensile test, stress distribution, elastic modulus, and resilient module.

1 Introducción

El módulo de elasticidad en mezclas asfálticas, constituye un parámetro elemental en los métodos de diseño y análisis de pavimentos con principios mecanicistas. Diversas fuentes de información y trabajos de investigación, comprueban que la metodología empleada a través del ensayo de tracción indirecta, conduce a resultados confiables en la caracterización mecánica de mezclas bituminosas. Esta prueba mundialmente conocida y normalizada, ha sido referencia en diferentes países para determinar parámetros elásticos vinculados a estos materiales. La sencillez de su procedimiento, el equipo de aplicación y el fundamento o bases teóricas que la soportan, incentivan los crecientes desarrollos y avances tecnológicos para la valoración de sus resultados.

Expresiones analíticas deducidas para determinar el módulo a través del ensayo de tracción indirecta (Yoder y col., 1975, Sánchez 2012), se han obtenido considerando los principios teóricos de distribución interna de esfuerzos (Frocht 1957), de probetas cilíndricas sometidas a carga diametral vertical y con medición de la deformación horizontal resultante. Estas relaciones están configuradas para el cálculo del módulo resiliente (MR) o elástico (E), en función del tipo de carga empleada (dinámica o monotónica). Otras expresiones similares, también son aplicadas en procedimientos normativos para este ensayo (ASTM D4123-82), y para la condición de carga cíclica.

Al contrastar las ecuaciones matemáticas propuestas y asociadas a la prueba experimental, a pesar de partir del mismo fundamento inicial, se aprecian diferencias particulares en algunos de los factores que configuran estas expresiones, por ello, en este trabajo se propone el estudio y comprobación de estas deducciones con la aplicación de un software matemático resolver numéricamente las integrales planteadas y obtener los valores que dan forma a las soluciones analíticas desarrolladas.

En virtud de la potencialidad de la herramienta computacional aplicada, se propone un análisis similar considerando la compleja distribución interna de esfuerzos planteada para el caso de una probeta cilíndrica cargada diametralmente a través de una ménsula o cabezal de apoyo (Hondros 1959), tal y como se utiliza en la ejecución real del ensayo, con el objetivo de configurar, comprobar y comparar los valores determinantes y que dan forma a las expresiones resultantes, empleadas para determinar el módulo de elasticidad en una muestra constituida por mezclas asfálticas.

2 Marco Teórico

2.1 Distribución teórica de esfuerzos para una carga diametral vertical.

Considerando la acción de una carga lineal vertical (P) aplicada directamente sobre un espécimen idealmente

homogéneo, isotrópico y linealmente elástico, se desarrollaron expresiones de distribución interna de esfuerzos para los casos especiales de los ejes diametrales horizontal y vertical (Frocht 1957). En la figura 1, se muestra gráficamente la distribución de tensiones obtenida con referencia al eje horizontal ($y=0$).

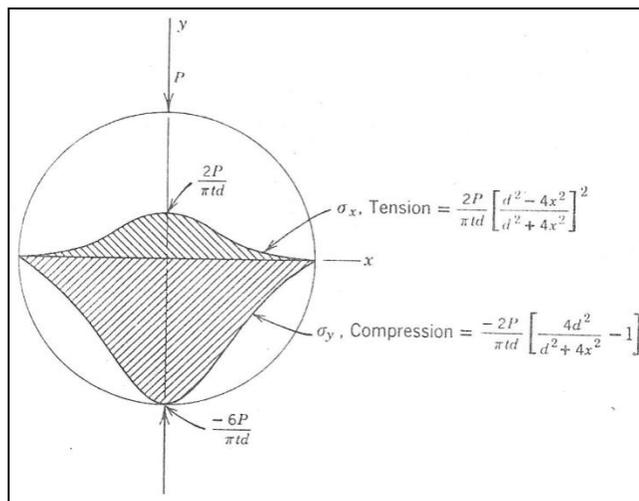


Fig. 1. Distribución teórica de esfuerzos según Frocht, en el eje horizontal. (Fuente: Yodery Witczak, 1975).

La formulación propuesta para los esfuerzos (Tracción y Compresión) desarrollados a lo largo del eje diametral horizontal, son:

$$[\text{Tracción}] \quad \sigma_x = \frac{2P}{\pi t d} \left(\frac{d^2 - 4x^2}{d^2 + 4x^2} \right)^2 \quad (1)$$

$$[\text{Compresión}] \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi t d} \left(\frac{4d^2}{d^2 + 4x^2} - 1 \right) \quad (2)$$

Estas ecuaciones (1) y (2), describen la distribución de tensiones en las direcciones x y y a lo largo del eje diametral horizontal y en términos de coordenadas rectangulares. Las variables físicas como el diámetro (d) y el espesor (t) corresponden a las dimensiones de la probeta cilíndrica empleada, la carga (P) es aplicada verticalmente sobre el espécimen para generar una falla por tracción en la región central.

Para el caso particular del eje vertical ($x=0$), la distribución de esfuerzos se representa gráficamente en la Figura 2. Las ecuaciones (3) y (4) describen las tensiones en las direcciones x y y a lo largo del eje diametral vertical.

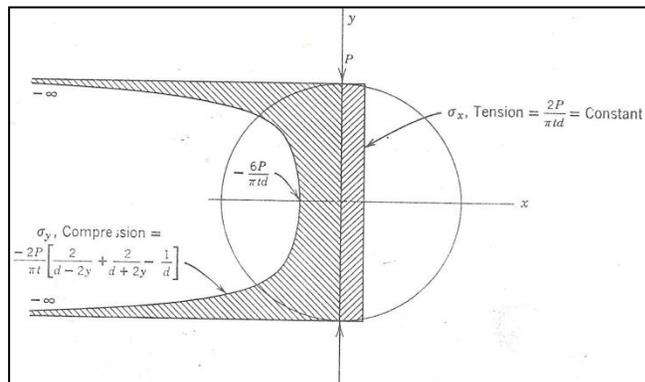


Fig.2. Distribución teórica de esfuerzos según Frocht, en el plano vertical. (Fuente: Yodery Witzczak,1975).

[Tracción]
$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi t d} \text{ (Constante)} \quad (3)$$

[Compresión]
$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi t} \left(\frac{2}{d-2y} + \frac{2}{d+2y} - \frac{1}{d} \right) \quad (4)$$

Las expresiones mostradas, son desarrolladas para el caso de carga lineal y condiciones idealizadas de comportamiento elástico lineal del material.

2.2 Distribución teórica de esfuerzos para una carga vertical distribuida sobre un arco finito.

De acuerdo a las condiciones de carga lineal, la probeta fallaría alrededor de los puntos de aplicación y no en la región central de la probeta debido a esfuerzos de tracción, por esta razón en la práctica experimental representado en la figura 3, se considera una placa o cabezal de apoyo para la distribución de la carga y la disminución de los efectos alrededor del punto de aplicación.

Considerando el elemento de apoyo para la acción de la carga, se planteo un conjunto de expresiones analíticas con mayor grado de complejidad, para representar la distribución de esfuerzos a lo largo de los ejes diametrales horizontal y vertical (Hondros 1959). Este elemento rígido considerado y denominado placa, tira o cabezal de apoyo, distribuye la carga disminuyendo notablemente los esfuerzos de compresión que provocarían una falla distinta a la esperada por tracción.

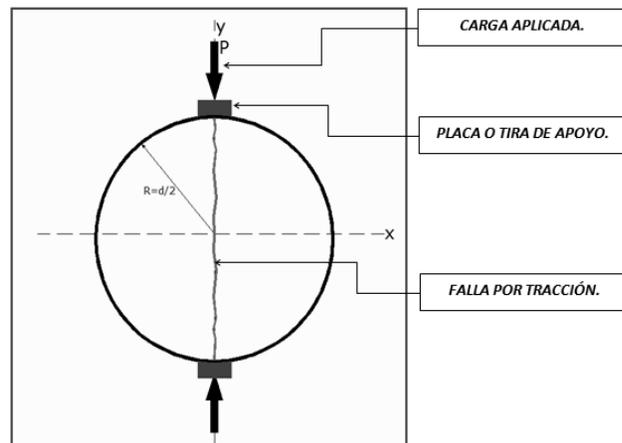
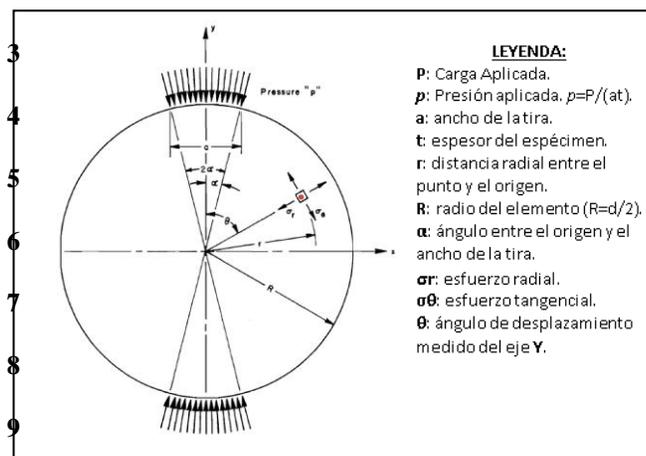


Fig.3. Modelo idealizado del ensayo de tracción indirecta.

La carga (P) aplicada sobre la placa de apoyo genera una presión uniforme (p) en el arco de contacto con la probeta, en la figura 4, se muestran las variables consideradas así como nadas empleado, para determinar los esfuerzos en un punto específico del elemento circular.



10

Fig.4. Sistema de coordenadas polares considerado por Hondros. (Fuente: Hadley, Hudsony Kennedy, 1970)

Las expresiones desarrolladas para la distribución de esfuerzos a lo largo del eje diametral horizontal (y=0), son presentadas a continuación:

Esfuerzo radial $\sigma(r_x)$ de tracción, perpendicular a la dirección de carga:

$$\sigma(r_x) = \frac{2P}{\pi t a} \left(\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{2r^2}{R^2} \cos 2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} - \operatorname{atan} \left(\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{r^2}{R^2}} \tan \alpha \right) \right) \quad (5)$$

Esfuerzo tangencial $\sigma(\theta_x)$ compresión, paralelo a la dirección de carga.

$$\sigma(\theta_x) = -\frac{2P}{\pi ta} \left(\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 + \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} + \text{atan} \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)} \text{Tan}\alpha \right) \quad (6)$$

Para el caso del eje diametral vertical ($x=0$), las ecuaciones que describen la distribución de tensiones en las direcciones perpendicular y paralela son las siguientes:

Esfuerzo tangencial $\sigma(\theta_y)$ tracción, perpendicular a la dirección de carga:

$$\sigma(\theta_y) = \frac{2P}{\pi ta} \left(\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 - \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} - \text{atan} \frac{\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \text{Tan}\alpha \right) \quad (7)$$

Esfuerzo radial $\sigma(r_y)$ compresión, paralelo a la dirección de carga:

$$\sigma(r_y) = -\frac{2P}{\pi ta} \left(\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 - \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} + \text{atan} \frac{\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \text{Tan}\alpha \right) \quad (8)$$

La distribución de esfuerzos resultante se muestra gráficamente en la figura 5, para los ejes diametrales y de acuerdo a las expresiones analíticas planteadas.

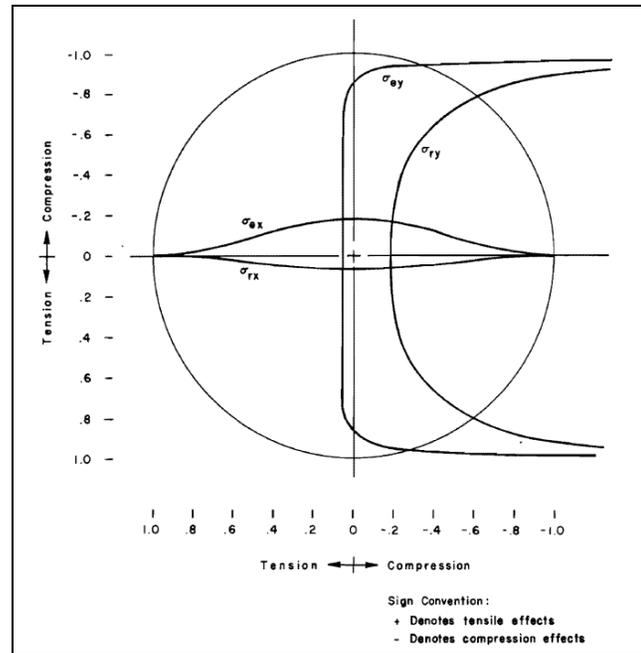


Fig.5. Distribución de esfuerzos de tensión y compresión a lo largo de los ejes diametrales planteados por Hondros.
(Fuente: Hadley, Hudsony Kennedy, 1970)

2.3 Deducción analítica para el módulo resiliente (MR).

El módulo elástico (E) de materiales tratados con asfalto, también se puede determinar por medio del dispositivo de módulo resiliente (elástico) diametral (Yoder y col., 1975). Esta prueba consiste básicamente en emplear una carga repetitiva y aplicar los principios teóricos de distribución de tensiones (Frocht 1957), propuestos para el ensayo de tracción indirecta. La principal ventaja de este procedimiento es la simplicidad del equipo experimental, así como la capacidad de analizar muestras de asfalto similares en tamaño a las utilizadas para las pruebas Marshall y Hveem ampliamente conocidos. El procedimiento repetitivo (carga pulsante) de 0,1 segundos de duración y en intervalos de 2,9 segundos se aplica diametralmente a la muestra. La carga dinámica, a su vez, da lugar a deformaciones dinámicas a través del plano diametral horizontal, el conocimiento de estos parámetros permite calcular el valor del módulo resiliente (MR).

Asumiendo la condición de tensión plana " $\sigma_z = 0$ " la deformación resultante (ϵ_x) estará dada por la expresión:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \quad (9)$$

En virtud de la sencillez de las ecuaciones (1) y (2), que son sustituidas en (9) y luego de un proceso de despeje matemático, se puede establecer por integración directa entre el rango ($x=-d/2$ a $x=d/2$) la expresión de deformación a lo largo del eje horizontal (δ_h), esta se presenta de la forma siguiente:

$$\delta_h = \frac{P}{tE} \left(\frac{4}{\pi} + \mu - 1 \right) \quad (10)$$

Por lo tanto, para una carga dinámica aplicada (P) y con medición en la deformación horizontal resultante (δ_h), el módulo (MR) asociado al ensayo es definido de la forma siguiente:

$$MR = \frac{P}{t\delta_h} \left(0.2734 + \mu \right) \quad (11)$$

La relación de Poisson (μ), comúnmente se considera 0.35 en materiales asfálticos, teniendo en cuenta que desviaciones de este valor no genera errores excesivos en los cálculos de MR.

2.4 Deducción analítica del módulo elástico (E).

Partiendo de los mismos fundamentos teóricos de distribución interna de esfuerzos, se deduce una expresión similar a la propuesta para el módulo resiliente (Sánchez 2012).

Para el caso diametral horizontal, las funciones de distribución de esfuerzo (Fig. 1) en la dirección vertical (σ_y) como en la horizontal (σ_x) representados en la briqueta, son continuas en el diámetro y su integración produce una fórmula cerrada del módulo elástico.

Se considera también la condición de esfuerzo plano ($\sigma_z=0$), para una carga aplicada estática o monótonica (P) y para el caso del ensanchamiento horizontal, luego de un proceso similar de sustitución e integración, se define la expresión de deformación:

$$\delta_h = \frac{P}{tE} \left(0.274 + 1.36\mu \right) \quad (12)$$

De (12) se obtiene para la carga aplicada (P), bien sea monótonica o dinámica y con medición en la deformación horizontal (δ_h), el módulo de elasticidad (E) resulta en:

$$E = \frac{P}{t\delta_h} \left(0.274 + 1.36\mu \right) \quad (13)$$

2.4 Expresión de módulo resiliente (MR) y carga cíclica aplicada

El método de prueba estándar aplicado al ensayo de tracción indirecta para determinar el Módulo Resiliente de mezclas bituminosas (ASTM D4123-82), para el caso de carga cíclica (Pcyclic) se calcula por la relación siguiente:

$$MR = \frac{P_{(cyclic)}}{t\delta_h} \left(0.27 + \mu \right) \quad (14)$$

Como se puede apreciar al comparar las expresiones resultantes de módulo elástico o resiliente, bien sea para carga dinámica (11), estática (13) o para el caso de ASTM D4123-82 de carga cíclica (14), a pesar de la analogía presente en su configuración, existen factores que generan una diferencia importante en los valores resultantes, específicamente el coeficiente multiplicador en la ecuación (13) que incrementa la relación de Poisson (μ).

3 Procedimiento Metodológico

En base a los planteamientos teóricos indicados y por las diferencias en las deducciones del módulo elástico asociadas al ensayo de tracción indirecta, se propone en el siguiente trabajo resolver numéricamente los procesos de integración de las relaciones establecidas, para detectar la razón de la divergencia presentada. Además, considerando el desarrollo analítico propuesto para el caso de carga distribuida a través del elemento o cabezal de apoyo (Hondros 1959) y en virtud de la herramienta computacional utilizada, solucionar las proposiciones matemáticas de gran complejidad debido a la sustitución de las expresiones de distribución de esfuerzos desarrolladas para el caso de deformación diametral horizontal.

3.1 Deducción de la ecuación de módulo elástico (E), a partir de las expresiones de distribución de esfuerzos para carga lineal vertical (Frocht 1957) y solución numérica de las integraciones propuestas

La deducción de la expresión de módulo elástico (E) o resiliente (MR), como se puede apreciar, es función de la carga aplicada (P), la deformación horizontal (δ_h) y el espesor de la probeta cilíndrica (t), estos parámetros de entrada son medidos en la ejecución de la prueba, la relación de Poisson (μ) es asumida para el tipo de material ensayado y los factores denominados (A y B), son obtenidos de un proceso de integración donde interviene directamente la distribución interna de esfuerzos en un rango finito establecido por el diámetro del espécimen. Por lo tanto, la ecuación resultante se puede escribir de una forma general:

$$E = \frac{P}{t\delta_h} \left(A + B\mu \right) \quad (15)$$

Dependiendo de la teoría de distribución interna de esfuerzos fundamentada para su deducción y el diámetro del espécimen considerado, se definen los factores (A y B). A continuación, se propone la deducción de estos coeficientes por medio de la integración de las expresiones planteadas resueltas por medio de un software matemático en un rango preestablecido.

En relación a las metodologías señaladas, se considerará las hipótesis de un material con propiedades homogéneas, isotrópicas e idealmente elástico, asimismo para la condición de esfuerzo plano ($\alpha_{za}=0$), la deformación unitaria en dirección x (ϵ_x), es obtenida por la ecuación (9), sustituyendo las expresiones de distribución de tensiones (1) y (2), obtenemos:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[\frac{2P}{\pi t d} \left(\frac{d^2 - 4x^2}{d^2 + 4x^2} \right)^2 + \frac{2P}{\pi t d} \left(\frac{4d^2}{d^2 + 4x^2} - 1 \right) \mu \right] \quad (16)$$

Operando y agrupando términos comunes, esta puede escribirse orientándola hacia los valores de comparación:

$$\epsilon_x = \frac{P}{tE} \left[\frac{2}{\pi d} \left(\frac{d^2 - 4x^2}{d^2 + 4x^2} \right)^2 + \frac{2}{\pi d} \left(\frac{4d^2}{d^2 + 4x^2} - 1 \right) \mu \right] \quad (17)$$

Se plantea la integración para un rango de valores o límites: $x=-d/2$ y $x=d/2$, de manera de obtener la deformación en dirección del eje diametral horizontal (δ_h):

$$\delta_h = \frac{P}{tE} \int_{-d/2}^{d/2} \left[\frac{2}{\pi d} \left(\frac{d^2 - 4x^2}{d^2 + 4x^2} \right)^2 + \frac{2}{\pi d} \left(\frac{4d^2}{d^2 + 4x^2} - 1 \right) \mu \right] dx \quad (18)$$

Aplicando la propiedad "la integral de una combinación lineal es la combinación lineal de las integrales", resolvámosla integración de manera separada con apoyo del software (Mathcad 14.0), para obtener los valores comparativos denominados "A" y "B".

Se asume un diámetro de 4pulg, característico de una probeta empleada en el ensayo Marshall de uso común en laboratorios de pavimentos. Para la propiedad aplicada se tiene la solución a las integraciones propuestas:

$$A = \frac{2}{\pi d} \int_{-d/2}^{d/2} \left[\left(\frac{d^2 - 4x^2}{d^2 + 4x^2} \right)^2 \right] dx = 0.273 \quad (19)$$

$$B = \frac{2}{\pi d} \int_{-d/2}^{d/2} \left[\frac{4d^2}{d^2 + 4x^2} - 1 \right] dx = 1.363 \quad (20)$$

Los valores calculados son sustituidos en (18), para plantear así la ecuación de la deformación total horizontal (δ_h):

$$\delta_h = \frac{P}{tE} \left(0.273 + 1.363 \mu \right) \quad (21)$$

Despejando el módulo de elasticidad (E), queda en función de la deformación horizontal medida (δ_h) y la carga aplicada (P):

$$E = \frac{P}{t \delta_h} \left(0.273 + 1.363 \mu \right) \quad (22)$$

La expresión resultante (22) es similar a la ecuación (13) (Sánchez 2012), con diferencias despreciables al comparar los factores que configuran ambas relaciones analíticas.

3.2 Deducción de la ecuación de módulo elástico, aplicando la teoría de distribución de esfuerzos propuestas para carga distribuida sobre un arco finito (Hondros 1959).

Para la deducción del módulo de elasticidad con fundamento en las expresiones de tensión interna propuestas para el caso de carga distribuida por el elemento de apoyo (Fig. 3), se consideran las ecuaciones (5) y (6) que describen los esfuerzos (tracción y compresión) en las direcciones x e y a lo largo del eje diametral horizontal.

El esfuerzo radial $\sigma_{(rx)}$, es la tracción perpendicular a la línea de carga, es decir, coincide con la dirección del esfuerzo horizontal (σ_x), asimismo el esfuerzo tangencial $\sigma_{(\theta x)}$, describe la compresión paralela a la línea de carga en la dirección vertical (σ_y), por tanto la ecuación (9) se puede escribir de la forma:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_{(rx)} - \mu \sigma_{(\theta x)} \right) \quad (23)$$

Sustituyendo las relaciones de distribución (5) y (6) en

la ecuación (23), la deformación unitaria toma la forma siguiente:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[\frac{2P}{\pi t a} \left(\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 + \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} - \text{atan} \left(\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{r^2}{R^2}} \right) \text{Tan}\alpha \right) \right. \\ \left. + \mu \frac{2P}{\pi t a} \left(\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 + \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} + \text{atan} \left(\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{r^2}{R^2}} \right) \text{Tan}\alpha \right) \right] \quad (24)$$

Se agrupan algunos términos comunes para establecer las operaciones de integración:

$$\epsilon_x = \frac{P}{tE} \left[\frac{2}{\pi a} \left(\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 + \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} - \text{atan} \left(\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{r^2}{R^2}} \right) \text{Tan}\alpha \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi a} \left(\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 + \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} + \text{atan} \left(\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{r^2}{R^2}} \right) \text{Tan}\alpha \right) \mu \right] \quad (25)$$

Asumiendo un diámetro de 4 pulg. Para los especímenes de prueba, la deformación a través del eje diametral horizontal, se puede encontrar integrando la ecuación (25) entre los límites $r=-R$ y $r=R$.

$$\delta_h = \frac{P}{tE} \int_{-R}^R \left[\frac{2}{\pi a} \left(\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 + \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} - \text{atan} \left(\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{r^2}{R^2}} \right) \text{Tan}\alpha \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi a} \left(\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 + \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} + \text{atan} \left(\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{r^2}{R^2}} \right) \text{Tan}\alpha \right) \mu \right] dr \quad (26)$$

Aplicando propiedades de integración, se plantea la so-

lución operando separadamente y con apoyo del software se resuelve numéricamente las complejas integrales definidas, obteniendo así los valores que configuran la relación de deformación horizontal (δ_h):

$$A = \frac{2}{\pi a} \int_{-R}^R \left[\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 + \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} - \text{atan} \left(\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{r^2}{R^2}} \right) \text{Tan}\alpha \right] dr = 0.27 \quad (27)$$

$$B = \frac{2}{\pi a} \int_{-R}^R \left[\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{Sen}2\alpha}{1 + \frac{2r^2}{R^2} \text{Cos}2\alpha + \frac{r^4}{R^4}} + \text{atan} \left(\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 + \frac{r^2}{R^2}} \right) \text{Tan}\alpha \right] dr = 1.00 \quad (28)$$

Sustituyendo los factores calculados en la ecuación (26), definimos la relación para la deformación horizontal:

$$\delta_h = \frac{P}{tE} (0.27 + \mu) \quad (29)$$

Por tanto, en función de una carga vertical aplicada y la deformación horizontal resultante, el módulo de elasticidad es calculado por la expresión siguiente:

$$E = \frac{P}{t\delta_h} (0.27 + \mu) \quad (30)$$

4 Discusión y Resultados

Fundamentados en los principios teóricos de distribución de tensiones internas propuesto (Frocht 1957) y aplicando la integración numérica a través del software (*Mathcad 14*), se deduce la ecuación (22) obteniendo factores análogos a la expresión planteada en (13).

La configuración resultante de la ecuación(30),obtenida de la integración de las expresiones de distribución de esfuerzos del desarrollo analítico para carga vertical distribuida sobre el espécimen (Hondros 1959) y resulttas numéricamente por el programa computacional empleado, se obtuvieron factores aproximados a la planteada para el cálculo del módulo resiliente (11)(Yoder ycol.,1975),en función de la carga dinámica, además es similar a la ecuación (14) utilizada según el procedimiento ASTM (D4123-82) para el cálculo del (*MR*) y carga cíclica,

comprobandose por medio de la integración numérica los factores que intervienen en las expresiones comúnmente aplicadas y asociadas a la prueba de tracción indirecta.

De acuerdo al análisis presentado, se confirma que al calcular el módulo de una mezcla asfáltica por medio de la expresión (30), se considera la aplicación de la carga por medio de la placa o cabezal de apoyo, tal y como se aplica en el caso real del ensayo. En su presunción se introducen parámetros medidos experimentalmente como diámetros y ancho de placa, estas dimensiones pueden variar en caso de adaptaciones del equipo de prueba o debido a las dimensiones de las probetas de ensayo, como las usadas en Superpave de 6 pulg de diámetro. Considerando esta posibilidad y en virtud de la metodología aplicada, se recalcularon los factores deducidos para la fórmula (30), y se evalúa su sensibilidad ante posibles variaciones prácticas.

Se promovieron diferentes diámetros de los especímenes y dos anchos de placas (A) comúnmente empleados en la aplicación real de la prueba, se recalcularon los parámetros (A y B) con el objetivo de establecer la variabilidad de los factores que definen la expresión resultante. En la tabla 1, se muestran los resultados de los factores calculados para los diferentes diámetros considerados y anchos de placa comúnmente utilizados en la ejecución del ensayo.

Tabla 1. Factores comparativos (A y B), para diferentes diámetros de especímenes y anchos de placas de aplicación de carga.

Diámetro de probeta (pulg)	Ancho de Placa (a=1/2 pulg)		Ancho de Placa (a=1 pulg)	
	A	B	A	B
2.0	0.26	1.00	0.21	1.00
2.5	0.27	1.00	0.24	1.00
3.0	0.27	1.00	0.25	1.00
3.5	0.27	1.00	0.26	1.00
4.0	0.27	1.00	0.26	1.00
4.5	0.27	1.00	0.26	1.00
5.0	0.27	1.00	0.27	1.00
5.5	0.27	1.00	0.27	1.00
6.0	0.27	1.00	0.27	1.00

Como se aprecia en la tabla 1, la incidencia de los diferentes diámetros y ancho de placa evaluados es mínima o despreciable en la deducción de la expresión (30), ya que la variabilidad de los factores (A y B) ante las modificaciones promovidas, no presenta diferencias significativas en la configuración de la ecuación de módulo elástico (E) o resiliente (MR).

5 Conclusiones

De los estudios analíticos planteados referentes a la deducción de las expresiones de modulo elástico (E) o resiliente (MR), asociadas al ensayo de tracción indirecta, podemos destacar el amplio fundamento teórico que respalda la prueba, lo que conlleva a resultados confiables para la

caracterización de materiales asfálticos.

De la aplicación del software Mathcad 14, para comprobar los procesos de integración en los planteamientos analíticos que definen las expresiones derivadas para la prueba, resaltamos la potencialidad de esta herramienta para obtener valores resultantes a pesar de la complejidad de las ecuaciones matemáticas procesadas, lo que incentiva a profundizar en investigaciones futuras.

Para las condiciones de carga lineal vertical aplicada directamente sobre la probeta y distribución interna de esfuerzos fundamentada por las expresiones (1) y (2) (Frocht1957), se comprobaron los factores que configuran la ecuación de módulo elástico obtenido en el planteamiento analítico para la relación (13) (Sánchez 2012).

En el caso de carga distribuida por medio de una placa o cabezal de apoyo y considerando la descripción de las tensiones internas establecida teóricamente por las expresiones (5) y (6) (Hondros1959), se comprobaron los factores que configuran la expresión de módulo resiliente propuesta en (11) (Yoder y col., 1975) y la presentada en la normativa técnica (ASTM D4123-82) para carga cíclica (14).

En la evaluación de los factores de la expresión final (30) de módulo elástico (E) o resiliente (MR), obtenida y comprobada por integración numérica, para el rango analizado se considera irrelevante el efecto de los posibles cambios de los parámetros adjuntos como el diámetro y el ancho de placa, ya que no generan variaciones significativas en los coeficientes numéricos (A y B) de la relación resultante.

Referencias

- Corredor G, 2005, Apuntes de pavimentos. Mezclas asfálticas materiales y diseño, Universidad Santa María y Universidad Católica Andrés Bello, Caracas, Venezuela, Vol. 2, pp. 45-50.
- Frocht M, 1957, Photoelasticity, John Wiley and Sons, New York, USA, Vol. 2.
- Garnica P, Correa A, 2004, Conceptos mecanicistas en pavimentos, Publicación técnica No 258, Secretaria de Comunicaciones y Transporte. Instituto Mexicano del Transporte, México. Se encuentra en: <http://www.imt.mx/Archivos/Publicaciones/PublicacionTecnica/pt258.pdf>. Fecha de consulta: 10 Diciembre 2015.
- Hadley O, Hudson R, Kennedy W, 1970, Evaluation and prediction of the tensile properties of asphalt-treated materials, Highway Research Board Annual Meeting, Washington DC, USA. Nro. 98-9, pp.63-80.
- Hondros G, 1959, The evaluation of poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete. AustrJ.Appl.Sci., Vol.10-3, pp. 243-268.
- Kennedy W, Hudson R, 1968, An indirect tensile test to stabilized materials, Highway Research Board Annual Meeting, Washington DC, USA. Nro.98-1, pp. 1-36.
- Leithold L, 1998, El Cálculo, Oxford University Press –

Harla, México, pp. 545-553

Normas ASTM (America Society for Testing and Materials), Designation: D4123 - 82 (1987), Standard Test Method for Indirect Tension Test for Resilient Modulus Test of Bituminous Mixtures.

Sánchez F, 2012, ¿Cuál es el módulo elástico de una mezcla asfáltica en caliente diseñada con Marshall?, Se encuentra en: <http://blogramcodes.blogspot.com/2012/08/cual-es-el-modulo-de-una-mac-marshall.html>. Fecha de consulta: 18 Octubre 2015.

Yoder J, Witzak W, 1975, Principles of Pavement Design, John Wiley and Sons, New York, USA, pp. 259-269.

Recibido: 13 de febrero de 2016

Aceptado: 12 de junio de 2016

Araujo, Nómar: MSc en Ingeniería Vial, Profesor Instructor del Departamento de Ingeniería, NURR-ULA.

Márquez, Jogly: Profesor Asistente del Departamento de Ingeniería, NURR-ULA. Correo electrónico: joglmarq@gmail.com

