Integrales de Simetría en 3D

Adolfo Acosta Email: adolfoa_18@yahoo.com Tlf 0058-0286-934 74 26

Universidad Simón Bolívar, Venezuela.

Abstract:

Hasta ahora la única noción que tenemos de una primitiva de integral en tres dimensiones (3D) en el espacio R^3, es el teorema de Stokes para campos vectoriales conservativos (gradientes), cuya integral da como resultado un campo escalar (potencial). De manera que la física adolece de una herramienta matemática para hallar primitivas de campos escalares y sus respectivas aplicaciones en 3D. La inclusión de algunas simetrías en el planteamiento del proceso de integración, da como resultado nuevas fórmulas de integración y la posibilidad de obtener primitivas de algunas funciones escalares de tres dimensiones. Además de un nuevo e insospechable poder de cálculo. En este ensayo presentaremos dos ejemplos sencillos asociados a dos diferentes tipos de expansión de las variables, ligados también al tipo de simetría, que llamaremos base triangular y base circular-elíptica

Integrals in Symmetry on 3D

Abstract:

Until now the only notion which we have of an integral primitive on three dimensions (3D) in R^3, is the Stoke`s Theorem for conservatives vectorial fields (gradients), whose integral turn out a scalar field (potential). So that the physics lack of mathematical tool to find primitive of scalar fields and its applications in 3D. The inclusion of some symmetries in the exposition of the integration process, gives as result new formulas of integration and the possibility to obtaining primitive from some three dimensional scalar functions. In addition to a new and powerful skill to be able to calculation. In this test we will display two simple examples associate so two different types of variables expansion, related also from the type of symmetry, that we will call triangular and circular-elliptical bases.

Introducción: Como es sabido la integral múltiple por su definición es una integral definida, de modo que hasta ahora hemos carecido de primitivas para el espacio R^3. El objetivo de este trabajo es presentar por vez primera **Primitivas** para integrales en tres dimensiones, obtenidas a través de un algoritmo que denominamos “**Integración Simétrica**”. Un concepto nuevo que constituye una conexión entre la simetría y el cálculo, y que pone de manifiesto que la ausencia de primitivas en el espacio R^3, es consecuencia de la incapacidad de visualizar simetrías tridimensionales. Inversamente, la percepción de simetrías implica mayor capacidad en el poder de cálculo, como lo demostraremos en algunos ejemplos que resaltan el inmenso contraste de este nuevo procedimiento, con el procedimiento tradicional de la integral múltiple.

Integración simétrica: Llamaremos así al procedimiento a priori de hallar una primitiva de una función **“Identidad”**, a través del área bajo su curva. Cuyo cálculo visualizamos por su simetría sobre una figura que sirve de patrón, y cuya área es conocida en forma analítica. Por ejemplo en el cálculo tradicional de 2D (ver **figura 1**) definimos la función identidad: $f(x) = x$, la figura que sirve de patrón es el cuadrado cuya área es $b.h$, **b** $= x$, **h** $= f(x) = x$. En el mismo orden de ideas la función identidad tiene simetría 2 dentro de la figura del cuadrado. La primitiva es entonces la expresión analítica que resulta del área del cuadrado ($b.h$) entre la simetría de la función que es 2: $F(x) = \int f(x)dx = \frac{b.h}{2} = \frac{x.f(x)}{2} = \frac{x.x}{2} = \frac{x^2}{2}$

Hipótesis de integración simétrica:

La simetría del área bajo la curva de una potencia de la función identidad, en relación al área de la figura elegida como patrón, aumenta en la misma cantidad que incrementa el exponente de la potencia. Es decir, si queremos hallar ahora la primitiva de $f(x) = x^n$, el incremento del exponente de la potencia con respecto a la función identidad $f(x) = x$, es n - 1, y por tanto este es el incremento en el denominador por la simetría. La primitiva es: $F(x) = \int f(x)dx = \frac{b.h}{2+n-1} = \frac{x.f(x)}{n+1} = \frac{x.x^n}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Consideraciones para integrales de tres dimensiones:

1) La base en la integración 3D (a diferencia de 2D) debe escogerse de entre un sinnúmero de formas. Aquí consideraremos dos: base triangular y base circular-elíptica.

2) El Diferencial dxy que usamos como notación no representa un rectángulo infinitesimal como en la integral doble de 2D.

3) Los Límites de integración para evaluar la primitiva, son las distintas ecuaciones de la superficie que delimitan el volumen a calcular.

4) La Constante de integración **C** puede ser una función y será omitida en el procedimiento.

Integral de Base Triangular

Como su nombre indica consiste en tomar como base de integración un triángulo, que para simplificar, elegimos rectángulo cuyos catetos valen la unidad y coinciden con los ejes x, y (como muestra la **figura 2** en rojo). Sobre ella graficamos la función "identidad", apropiada para esta base *f(x,y) = x + y*. La figura patrón sobre la cual se define la simetría es el cubo. El resultado es un prisma inscrito en el cubo con simetría 3, dentro del mismo (ver **figura 2** en azul). Aplicamos ahora el algoritmo de integración simétrica para obtener la primitiva de la función identidad *f(x,y) = x + y*, como lo hicimos para *f(x) = x* en 2D. Tomando en cuenta que la base del cubo es ahora el área *x.y* = **b,** con su altura **h** = *f(x,y) = x + y*. La primitiva *F(x,y)*, es la expresión analítica que resulta del volumen del cubo entre la simetría de la función identidad que es 3:

$F(x,y)=\int f(x,y)dxy=\dfrac{b.h}{3}=\dfrac{x.y.f(x,y)}{3}=\dfrac{x.y.(x+y)}{3}$ ¡Eureka! Ahora tenemos la primera primitiva de un campo escalar en R^3. Aplicando ahora la hipótesis de la integración simétrica tenemos la primitiva para cualquier potencia de la función lineal $(x + y)^n$: $\int (x+y)^n\,dxy=\dfrac{x.y.(x+y)^n}{3+n-1}=\dfrac{x.y.(x+y)^n}{n+2}$

Generalizando para un binomio con coeficientes a y b, por cambio de variable resulta:

$$\textbf{1)}\quad \int (ax+by)^n\,dxy=\frac{x.y.(ax+by)^n}{n+2}+C \quad n\neq -2$$

Ilustremos ahora el poder de cálculo de esta integral, con un **Ejemplo:**

Hallar el volumen bajo la superficie de la función $f(x,y)=\sqrt{(2x+3y)^7}$, comprendida entre los planos *2x + 3y = 3, 2x + 3y = 2*. En la **figura 3** mediante la gráfica visualizamos el volumen a hallar. Aplicando la fórmula **1)** la primitiva es: $F(x,y)=\dfrac{2xy\sqrt{(2x+3y)^7}}{11}$ Los límites de integración para evaluar esta primitiva, son las distintas ecuaciones de superficie, las cuales agrupamos a manera de parámetros **b** y **a** como en la integral tradicional: **b**) x = 3/2, y = 1, 2x + 3y = 3 **a**) x = 1, y = 2/3, 2x + 3y = 2

Introducimos estos parámetros en la primitiva hallada en la forma *F(**b**) – F(**a**):*

$$\frac{2.(3/2).(1)(3)^{7/2}}{11}-\frac{2.(1).(2/3).(2)^{7/2}}{11}=11{,}38283$$

Este mismo resultado puede verificarse por el método tradicional de la integral múltiple, originándose integrales nada fáciles de resolver, además de que se hace necesario dividir la región en dos partes.

Base circular elíptica

Podemos ahora aplicar el procedimiento anterior para esta base (ver **figura 4**), donde la función identidad es el paraboloide $f(x,y) = x^2 + y^2$, que divide al cilindro (escogido como figura patrón) en dos volúmenes iguales (simetría 2). Aplicando directamente la hipótesis de integración simétrica para esta base, donde la altura **h** = $f(x,y) = x^2 + y^2$, el área de la base **b** = $pr^2 = p(x^2 + y^2)$:

$$\int (x^2 + y^2)^n \, dxy = \frac{(x^2 + y^2)^n \, \pi(x^2 + y^2)}{2 + n - 1} = \frac{\pi(x^2 + y^2)^{n+1}}{n+1}$$

Generalizando para un binomio con coeficientes a^2 y b^2 (base elíptica) por cambio de variable:

$$\textbf{2)} \quad \int (b^2x^2 + a^2y^2)^n \, dxy = \pi \frac{(b^2x^2 + a^2y^2)^{n+1}}{ab(n+1)} + C_{xy} \qquad n \neq -1$$

Ejemplo: Ilustremos también el poder de esta integral para calcular el volumen de una semiesfera de radio a: $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$ interceptada con un cilindro de radio r: $x^2 + y^2 = r^2$ (**figura 5**). Para hallar la primitiva de $f(x,y)$ procedemos como estamos acostumbrados en el cálculo tradicional, por cambio de variable y aplicando la fórmula **2)** sólo que el diferencial de $-x^2 - y^2$ es directamente - dxy

$$\int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dxy = -\frac{\pi(a^2 - x^2 - y^2)^{1/2+1}}{1/2 + 1} \quad = -\frac{2.\pi}{3}\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}$$

Ahora insertamos en esta primitiva obtenida, los límites de integración que son las superficies cilíndricas $x^2 + y^2 = 0,$ $x^2 + y^2 = r^2$. El resultado es finalmente: $V = \frac{2}{3}\pi\left[\sqrt{(a^2)^3} - \sqrt{(a^2 - r^2)^3}\right]$

En la **tabla I** mostramos también algunas primitivas de las funciones más relevantes. Si quisiéramos calcular, por ejemplo, el volumen generado por la campana de Gauss (e^{-x^2}) en revolución, tomaríamos la primitiva de la exponencial $e^{x^2+y^2}$ y evaluaríamos desde $x^2 + y^2 = 0$, hasta $x^2 + y^2 = \infty$, el resultado da p.

$$F(x,y) = \int e^{-x^2-y^2} dxy = -\pi e^{-x^2-y^2}, \quad V = -\pi e^{-x^2-y^2}\Big|_{x^2+y^2=\infty} - (-\pi)e^{-x^2-y^2}\Big|_{x^2+y^2=0} = -pe^{-\infty} + pe^{-0} = p$$

Deducción tampoco fácil de obtener por el proceso tradicional de la integral múltiple, que además requiere cambiar a coordenadas a polares.

Conclusiones: Los resultados en 3D redundan en lo que ya se ha derivado de 2D. Sin embargo tenemos un procedimiento mucho más resumido, y un mayor poder de cálculo. Además se abre un nuevo horizonte de aplicaciones, si consideramos todas las herramientas afines al cálculo: La derivada 3D para cada tipo de base, ecuaciones diferenciales, series de potencias, polinomios etc. a las cuales habría que aplicarles este nuevo concepto, sobre el enfoque de un cálculo para dos o más variables independientes.

Aparte de esto, el revelar la conexión entre la simetría y el cálculo, tras haber desglosado en tres los elementos que lo definen**:** la base de expansión de las variables con su correspondiente función identidad, la figura patrón, y la métrica sobre la cuál se define la simetría, permite no sólo incursionar aplicaciones en simetrías semienteras, sino también generalizar un procedimiento de cálculo para el análisis multidimencional que genere primitivas en espacios Euclídeos y no Euclídeos n dimensional, según la capacidad de percibir una simetría particularizada a un modo de expansión de las variables, inherente a la base de integración y al volumen patrón escogidos.

Agradecimientos:

A Dios quien da la ciencia y la sabiduría Daniel 2:20-22.

A mi esposa Josefina por su constante ánimo para llevar a cabo este ensayo.

A la Sociedad Venezolana de Física en representación de su presidente Dr. Pio Arias.

A Nitro PDF Software y BCL Technologies por sus servicios prestados.

Curriculum Adolfo Acosta es licenciado en física egresado de la Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela y técnico electrónico egresado de CANTV. Formó parte del personal docente de la coordinación de Física del Cenamec del Ministerio de Educación Cultura y Deportes, donde laboró en el área investigativa para la experimentación de ensayos y prototipos para el mejoramiento de la enseñanza de la Física, bajo la supervisión del Dr. Enrique Planchart. Fue también promotor de la enseñanza de la Astronomía para niños en la misma institución y encargado del área de electrónica. Actualmente no ejerce institucionalmente la profesión y es pastor de una iglesia evangélica.

Figuras y Tablas

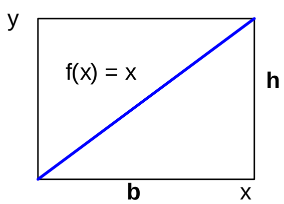

Figura 1

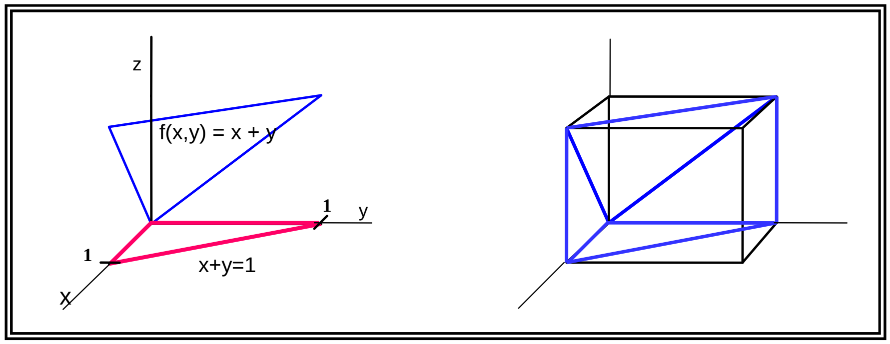

Figura 2

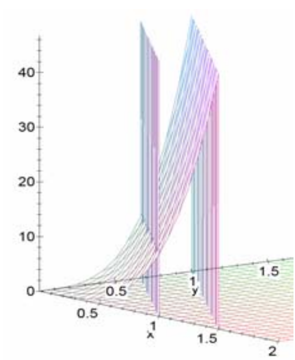

Figura 3

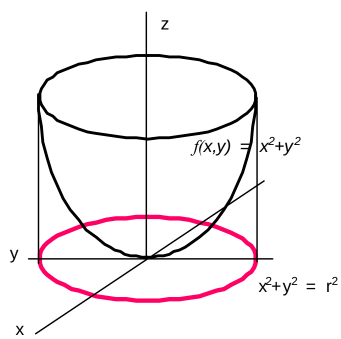

Figura 4

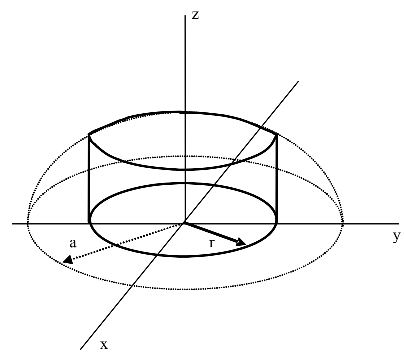

Figura 5

Función	Primitiva
Constante K	$K.\pi\left(x^2+y^2\right)$
$\left(x^2+y^2\right)^n$	$\pi.\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^{n+1}}{n+1}$
$1/(x^2+y^2)$	$\pi.Ln(x^2+y^2)$
$e^{x^2+y^2}$	$\pi.e^{x^2+y^2}$
$\sin(x^2+y^2)$	$\pi.\cos(x^2+y^2)$

Tabla I